Análise Funcional
Douglas de Araujo Smigly

MAT0334 / MAT5721[1]

1º semestre de 2019

[1]Notas de aula da disciplina MAT0334/MAT5721 - Análise Funcional, ministrada pelo professor Wilson Albeiro Cuellar Carrera no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Conteúdo

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 Relação de preordem

Definição 1. Uma **preordem** em um conjunto X é uma relação entre pares de elementos de X, genericamente representada pelo símbolo $\leq$, que se caracteriza por cumprir as seguintes duas propriedades:

- $x \leq x$;
- Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;

Indica-se com a notação $(X, \leq)$ um conjunto X munido com uma preordem $\leq$. Dizemos neste caso que X é um conjunto **preordenado**.

Para conjunto X e preordem R e para $Y \subseteq X$, então a relação $R \cap (Y \times Y)$ é uma preordem, e chamamos de **preordem induzida** em Y por R.

Para conjunto X e preordem R, então a relação R^{-1} é uma preordem, e chamamos de **preordem oposta** a R.

Para conjunto X, se denotamos uma preordem por $\leq$, então também denotamos a preordem oposta por $\geq$.

Definição 2. Seja $(X, \leq)$ um conjunto preordenado.

- Dizemos que $(X, \leq)$ é **dirigido (ou filtrante) por cima** se e só se dados quaisquer $x, y \in X$, existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$.
- Dizemos que $(X, \leq)$ é **dirigido (ou filtrante) por baixo** se e só se $(X, \geq)$ é dirigido por cima.
- Dizemos que $(X, \leq)$ é **dirigido (ou filtrante)** se e só se é dirigido por cima e por baixo.

Definição 3. Para conjunto preordenado X:

- Um **segmento final** é um $E \subseteq X$ tal que para $x, y \in X$, se $x \in E$ e $x \leq y$, então $y \in E$.
- Um **segmento inicial** é um segmento final de X em relação à preordem oposta.
- Um **intervalo** é um $E \subseteq X$ tal que para $x, y, z \in X$, se $x \in E$ e $y \in E$ e $x \leq z \leq y$, então $z \in E$.

Definição 4. Para conjunto preordenado X e para $E \subseteq X$:

- Dizemos que E é **cofinal** em X se e só se para $x \in X$ existe $e \in E$ tal que $x \leq e$.
- Dizemos que E é **coinicial** em X se e só se é cofinal em X em relação à preordem oposta.
- Dizemos que E é **coterminal** em X se e só se é cofinal e coinicial em X.

Em topologia, também diremos que E é um **sistema fundamental** de X se e só se E é coinicial em X.

Proposição 1. Para conjunto preordenado X e e subconjunto B, então:

- O conjunto dos $x \in X$ tais que existe $b \in B$ tal que $b \leq x$ é o menor segmento final de X contendo B, e chamá-lo-emos de **o segmento final gerado por** B.
- O conjunto dos $x \in X$ tais que existe $b \in B$ tal que $x \leq b$ é o menor segmento inicial de X contendo B, e chamá-lo-emos de **o segmento inicial gerado por** B.
- O conjunto dos $x \in X$ tais que existem $a, b \in B$ tais que $a \leq x \leq b$ é o menor intervalo de X contendo B, e chamá-lo-emos de **o intervalo gerado por** B.

Demonstração. Temos o seguinte:

- Seja E o conjunto dos $x \in X$ tais que exista $b \in B$ tal que $b \leq x$. Para $x, y \in X$, se $x \in E$ e $x \leq y$, existe $b \in B$ tal que $b \leq x$, aí $b \leq y$, aí $y \in E$; logo E é um segento final. Para $b \in B$, então $b \leq b$, aí $b \in E$; logo $B \subseteq E$. Para segmento final F tal que $B \subseteq F$, então para $x \in E$ existe $b \in B$ tal que $b \leq x$, aí $b \in F$, aí $x \in F$; aí $E \subseteq F$.
- Basta aplicar o item anterior para a preordem oposta.
- Seja E o conjunto dos $x \in X$ tais que existam $a, b \in B$ tais que $a \leq x \leq b$. Para $x, y, z \in X$, se $x \in E$ e $y \in E$ e $x \leq z \leq y$, existem $a, b \in B$ tais que $a \leq x$ e $y \leq b$, aí $a \leq z \leq b$, aí $z \in E$; logo E é um intervalo. Para $b \in B$, então $b \leq b \leq b$, aí $b \in E$; logo $B \subseteq E$. Para intervalo F tal que $B \subseteq F$, então para $x \in E$ existem $a, b \in B$ tais que $a \leq x \leq b$, aí $a \in F$ e $b \in F$, aí $x \in F$; aí $E \subseteq F$.

□

Com isso, é fácil ver que, para conjunto preordenado X e para $B \subseteq X$, então B é um sistema fundamental de um único segmento final em X, que é justamente o segmento final gerado por B.

1.2 Filtros

Definição 5. Dado conjunto preordenado X, um **filtro** é um subconjunto $F \subseteq X$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $F \neq \emptyset$.
- F é dirigido por baixo.
- F é um segmento final.

Proposição 2. Seja X um conjunto preordenado e seja $B \subseteq X$, então B é um sistema fundamental de um filtro se e só se satisfizer as seguintes condições:

- $B \neq \emptyset$.
- B é dirigido por baixo.

Demonstração. Se B for base de um filtro F, então $F \neq \emptyset$ e $B \subseteq F$, aí $B \neq \emptyset$, e para $x, y \in B$ então existe $z \in F$ tal que $z \leq x$ e $z \leq y$, aí existe $b \in B$ tal que $b \leq z$, aí $b \leq x$ e $b \leq y$; logo B é dirigido por baixo.

Se B for não vazio e dirigido por baixo, então sendo F o segmento final gerado por B, então $B \subseteq F$, aí $B \neq \emptyset$, e para $x, y \in F$ existem $a, b \in B$ tais que $a \leq x$ e $b \leq y$, aí existe $c \in B$ tal que $c \leq a$ e $c \leq b$, aí $c \in F$ e $c \leq x$ e $c \leq b$; aí F é dirigido por baixo, aí F é um filtro. □

1.3 Relação de ordem

Definição 6. Dizemos que um conjunto preordenado $(X, \leq)$ é **parcialmente ordenado** se e só se satisfizer a seguinte propriedade:

- Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

Definição 7. Seja X um conjunto parcialmente ordenado.

- Dizemos que $x < y$ se e só se $x \leq y$ e $x \neq y$.
- Dizemos que $x > y$ se e só se $y < x$.

Proposição 3. Seja X um conjunto parcialmente ordenado. Para $x, y, z \in X$, se $x < y \leq z$ ou $x \leq y < z$, então $x < z$.

Demonstração. Se $x < y \leq z$ e $x \leq y < z$, então $x \leq y \leq z$, aí $x \leq z$, mas $x \neq y$ ou $y \neq z$, aí, juntando com $x \leq y$ e $y \leq z$, então $y \nleq x$ ou $z \nleq y$, aí, juntando com $y \leq z$ e $x \leq y$, então $x \neq z$, assim $x < z$. □

Definição 8. Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ é **totalmente ordenado** se e só se satisfizer a seguinte propriedade:

- $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição 9. Seja X um conjunto parcialmente ordenado e $E \subseteq X$ e $a \in X$.

- Dizemos que a é uma **cota superior** de E em X se e só se para todo $x \in E$ tivermos $x \leq a$.
- Dizemos que a é uma **cota inferior** de E em X se e só se para todo $x \in E$ tivermos $a \leq x$.

Definição 10. Seja X um conjunto parcialmente ordenado e $m \in X$.

- Dizemos que m é **máximo** se e só se para todo $x \in X$ tivermos $x \leq m$.
- Dizemos que m é **mínimo** se e só se para todo $x \in X$ tivermos $m \leq x$.
- Dizemos que m é **maximal** se e só se para todo $x \in X$, se $m \leq x$ então $x = m$.
- Dizemos que m é **minimal** se e só se para todo $x \in X$, se $x \leq m$ então $x = m$.

Lema 1 (Lema de Zorn)**.** Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que todo subconjunto totalmente ordenado M de X possua uma cota superior em X. Então X possui um elemento maximal.

Corolário 1. Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que todo subconjunto totalmente ordenado E de X possua uma cota superior em X. Então para $p \in X$, o conjunto X possui um elemento maximal m tal que $p \leq m$.

Demonstração. Seja Y o conjunto dos $x \in X$ tais que $p \leq x$. Para subconjunto totalmente ordenado E de X, então: (1) se $E = \emptyset$, então p é uma cota superior de $\emptyset$ em Y; (2) se $E \neq \emptyset$, então E tem uma cota superior m em X, mas existe $e \in E$, aí $p \leq e \leq x$, aí $m \in Y$. Logo, pelo lema de Zorn, Y tem um elemento maximal m. Para $x \in X$, se $m \leq x$, como $p \leq m$, então $p \leq x$, aí $x \in Y$, aí $x = m$. Logo m é maximal de X e $p \leq x$. $\square$

1.4 Reticulados

Definição 11. Seja conjunto parcialmente ordenado X e $E \subseteq X$ e $a \in X$.

- Dizemos que a é **supremo** de E em X se e só se a é mínimo do conjunto das cotas superiores de E em X, e nesse caso dizemos que $a = \sup_X E = \sup E$.
- Dizemos que a é **ínfimo** de E em X se e só se a é máximo do conjunto das cotas inferiores de E em X, e nesse caso dizemos que $a = \inf_X E = \inf E$.

Definição 12. Seja X um conjunto parcialmente ordenado.

- Dizemos que X é **limitado por cima** se e só se X tem um máximo, que nesse caso denotamos por 1 (ou $\top$).

- Dizemos que X é **limitado por baixo** se e só se X tem um mínimo, que nesse caso denotamos por 0 (ou $\bot$).
- Dizemos que X é **limitado** se e só se X é limitado por cima e por baixo.

Definição 13. Seja X um conjunto parcialmente ordenado.

- Dizemos que X é um **reticulado por cima** se e só se para $x, y \in X$ então $\{x, y\}$ tem supermo em X, que nesse caso denotamos por $x \sqcup y$ (ou $x \vee y$).
- Dizemos que X é um **reticulado por baixo** se e só se para $x, y \in X$ então $\{x, y\}$ tem ínfimo em X, que nesse caso denotamos por $x \sqcap y$ (ou $x \wedge y$).
- Dizemos que X é um **reticulado** se e só se é reticulado por cima e por baixo.

Proposição 4. Seja X um conjunto parcialmente ordenado, e seja F um segmento final de X. Então temos o seguinte:

- Se X é limitado por cima e $F \neq \emptyset$, então $1 \in F$.
- Se X é reticulado por baixo e F é dirigido por baixo, então para $x, y \in F$ temos $x \sqcap y \in F$.

Demonstração. Temos o seguinte:

- Se X é limitado por cima e $F \neq \emptyset$, então existe $x \in F$, mas $x \leq 1$, aí $1 \in F$.
- Se X é reticulado por baixo e F é dirigido por baixo, então para $x, y \in F$ existe $z \in F$ tal que $z \leq x$ e $z \leq y$, aí $z \leq x \sqcap y$, aí $x \sqcap y \in F$.

□

Definição 14. Um conjunto parcialmente ordenado é dito um **reticulado completo** se e só se todo subconjunto E de X tem supremo e ínfimo em X, que nesse caso denotaremos por $\bigsqcup E$ e $\bigsqcap E$ respectivamente. Além disso, se I é um conjunto e $x : I \to X$ é uma função, então definimos $\bigsqcup_{i \in I} x_i = \bigsqcup(\mathrm{Im}(x))$ e $\bigsqcap_{i \in I} x_i = \bigsqcap(\mathrm{Im}(x))$.

Proposição 5. Seja X um conjunto parcialmente ordenado em que todo subconjunto tenha supremo em X. Então X é reticulado completo.

Demonstração. Para $A \subseteq X$ seja B o conjunto das cotas inferiores de A em X. Seja m supremo de B em X. Então para todo $a \in A$, então para todo $b \in B$ temos $b \leq a$; logo $m \leq a$; portanto $m \in B$. Assim m é máximo de B, aí m é ínfimo de A em X. □

Definição 15. Um reticulado X é dito **distributivo** se e só se satisfizer as seguintes propriedades:

- $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$.

- $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$.

Proposição 6. Seja X um reticulado tal que para quaisquer $x, y, z \in X$ então tenhamos $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$. Então X é distributivo.

Demonstração. Para $x, y, z \in X$, então temos:

$$\begin{aligned} & (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z) \\ = \; & (x \sqcap (x \sqcup z)) \sqcup (y \sqcap (x \sqcup z)) \\ = \; & x \sqcup ((y \sqcap x) \sqcup (y \sqcap z)) \\ = \; & (x \sqcup (y \sqcap x)) \sqcup (y \sqcap z) \\ = \; & x \sqcup (y \sqcap z) \end{aligned}$$

Logo X é distributivo. □

Analogamente podemos mostrar que para reticulado X tal que para quaisquer $x, y, z \in X$ tenhamos $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$, então X é distributivo.

Definição 16. Seja X um reticulado completo:

- Dizemos que X é **infinitamente distributivo por cima** se e só se para $t \in X$ e $A \subseteq X$ tivermos $t \sqcap \left(\bigsqcup_{a \in A} a\right) = \bigsqcup_{a \in A}(t \sqcap a)$.
- Dizemos que X é **infinitamente distributivo por baixo** se e só se para $t \in X$ e $A \subseteq X$ tivermos $t \sqcup \left(\bigsqcap_{a \in A} a\right) = \bigsqcap_{a \in A}(t \sqcup a)$.
- Dizemos que X é **infinitamente distrubutivo** se e só se é infinitamente distributivo por cima e por baixo.

1.5 Álgebras Booleanas

Definição 17. Seja X um reticulado limitado. Para $x, y \in X$, dizemos que y é um **complemento** de x se e só se $x \sqcap y = 0$ e $x \sqcup y = 1$.

Proposição 7. Para reticulado limitado distributivo X e para $x, y, z \in X$, se y e z são complementos de x, então $y = z$.

Demonstração. Temos o seguinte:

- $z = 1 \sqcap z = (x \sqcup y) \sqcap z = (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z) = 0 \sqcup (y \sqcap z) = y \sqcap z$, aí $z \leq y$.
- $z = 0 \sqcup z = (x \sqcap y) \sqcup z = (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z) = 0 \sqcap (y \sqcup z) = y \sqcup z$, aí $y \leq z$.

Portanto $y = z$. □

Definição 18. Um **reticulado complementado** é um reticulado limitado em que todo elemento tenha um complemento.

Definição 19. Uma **álgebra booleana** é um reticulado complementado distributivo. Nesse caso, para cada $x \in X$, denotamos o único complemento por x^c.

Proposição 8. Se X é uma álgebra booleana, então $(x \sqcup y)^c = x^c \sqcap y^c$ e $(x \sqcap y)^c = x^c \sqcup y^c$.

Demonstração. Temos $(x \sqcup y) \sqcap (x^c \sqcap y^c) = (x \sqcap x^c \sqcap y^c) \sqcup (y \sqcap x^c \sqcap y^c) = 0 \sqcup 0 = 0$ e também $(x \sqcup y) \sqcup (x^c \sqcap y^c) = (x \sqcup y \sqcup x^c) \sqcap (x \sqcup y \sqcup y^c) = 1 \sqcap 1 = 1$, aí $(x \sqcup y)^c = x^c \sqcap y^c$. A outra identidade é mostrada de maneira análoga. □

Proposição 9. Toda álgebra booleana completa é infinitamente distributiva.

Demonstração. Para $t \in X$ e $A \subseteq X$, seja $w = \bigsqcup_{a \in A} a$, então $\forall a \in A : t \sqcap a \leq t \sqcap w$, e para $x \in X$ tal que $\forall a \in A : t \sqcap a \leq x$, então para $a \in A$ temos $t \sqcap a \leq x$, aí $t^c \sqcup x \geq t^c \sqcup (t \sqcap a) = t^c \sqcup a \geq a$; logo $w \leq t^c \sqcup x$, aí $t \sqcap w \leq t \sqcap (t^c \sqcup w) = t \sqcap w \leq x$; logo $t \sqcap w = \bigsqcup_{a \in A} (t \sqcap a)$. Logo X é infinitamente distributivo por cima. Analogamente mostramos que X é infinitamente distributivo por baixo. Assim X é infinitamente distributivo. □

Capítulo 2

Espaços Topológicos

2.1 Topologias Abstratas

2.1.1 Definições iniciais

Definição 20. Seja X um reticulado completo. Uma **topologia abstrata** em X é um subconjunto $T \subseteq X$ satisfazendo o seguinte:

- $1 \in T$.
- Para $x, y \in T$ então $x \sqcap y \in T$.
- Para $A \subseteq T$ então $\bigsqcup A \in T$.

Nesse caso (X, T) é dito um **espaço topológico abstrato**, e para $x \in X$ dizemos que x é **aberto** se e só se $x \in T$.

Exemplo 1. Dado reticulado completo X, então o conjunto X é uma topologia, chamada **topologia discreta**.

Exemplo 2. Dado reticulado completo X, então o conjunto $\{0, 1\}$ é uma topologia, chamada **topologia trivial (ou caótica)**.

2.1.2 Interiores abstratos

Para conjunto preordenado X e para $E \subseteq X$ e para $x \in X$, temporariamente definiremos $E_x = \{e \in E : e \leq x\}$.

Definição 21. Se X é espaço topológico, para $x \in X$ definimos o **interior** de x como $x^o = \bigsqcup T_x$.

Proposição 10. Para espaço topológico X e para $x \in X$, então $x^o \in T$.

Demonstração. Para $x \in X$, então $T_x \subseteq T$, aí $x^o = \bigsqcup T_x \in T$. □

Proposição 11. Seja X um espaço topológico, então temos as seguintes propriedades:

- Se $x \leq y$ então $x^o \leq y^o$.
- $x^o \leq x$.
- $x^o \leq x^{oo}$.
- $1 \leq 1^o$.

Além disso, $x \in T$ se e só se $x \leq x^o$.

Demonstração. Temos o seguinte:

- Se $x \leq y$, então para $t \in T$ tal que $t \leq x$ temos $t \leq y$; aí $x^o \leq y^o$.
- Para $t \in T$ tal que $t \leq x$ temos $t \leq x$; aí $x^o \leq x$.
- Temos $x^o \in T$ e $x^o \leq x^o$, aí $x^o \leq x^{oo}$.
- Temos $1 \in T$ e $1 \leq 1$, aí $1 \leq 1^o$.

Além disso, se $x \in T$, como $x \leq x$, então $x \leq x^o$. Por outro lado, se $x \leq x^o$, como $x^o \leq x$, então $x = x^o$, mas $x^o \in T$, aí $x \in T$. $\square$

Proposição 12. Seja X um espaço topológico infinitamente distributivo por cima. Então temos o seguinte:

- $x^o \sqcap y^o \leq (x \sqcap y)^o$.

Demonstração. Para $a \in T_x$ e $b \in T_y$ temos $a \in T$ e $a \leq x$ e $b \in T$ e $b \leq y$, aí $a \sqcap b \in T$ e $a \sqcap b \leq x \sqcap y$, aí $a \sqcap b \leq (x \sqcap y)^o$; assim temos:

$$\begin{array}{rl} & x^o \sqcap y^o \\ = & \left(\bigsqcup_{a \in T_x} a\right) \sqcap \left(\bigsqcup_{b \in T_y} b\right) \\ = & \bigsqcup_{a \in T_x} \bigsqcup_{b \in T_y} (a \sqcap b) \\ \leq & (x \sqcap y)^o \end{array}$$

$\square$

Proposição 13. Seja X um reticulado completo e seja $f : X \to X$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- Se $x \leq y$ então $f(x) \leq f(y)$.
- $f(x) \leq x$.
- $f(x) \leq f(f(x))$.

- $1 \leq f(1)$.
- $f(x) \sqcap f(y) \leq f(x \sqcap y)$.

Então existe uma única topologia T tal que para $x \in X$ então $x^o = f(x)$.

Demonstração. Seja $T = \{x \in X : x \leq f(x)\}$. Então temos:

- Como $1 \leq f(1)$, então $1 \in T$.
- Para $x, y \in T$, então $x \leq f(x)$ e $y \leq f(y)$, aí $x \sqcap y \leq f(x) \sqcap f(y) \leq f(x \sqcap y)$, aí $x \sqcap y \in T$.
- Para $A \subseteq T$, então para $a \in A$ temos $a \in T$ e $a \leq \bigsqcup A$, aí $a \leq f(a) \leq f(\bigsqcup A)$; logo $\bigsqcup A \leq f(\bigsqcup A)$, aí $\bigsqcup A \in T$.

Logo T é uma topologia em X. Além disso, temos o seguinte:

- Temos $x^o \in T$ e $x^o \leq x$, aí $x^o \leq f(x^o)$ e $f(x^o) \leq f(x)$, aí $x^o \leq f(x)$.
- Temos $f(x) \leq f(f(x))$, aí $f(x) \in T$, mas $f(x) \leq x$, aí $f(x) \leq x^o$.

Portanto $x^o = f(x)$. □

2.1.3 Bases abstratas

Definição 22. Para espaço topológico X, uma **base** para a topologia T é um subconjunto $B \subseteq T$ tal que para todo $x \in T$ tenhamos $x \leq \bigsqcup B_x$.

Proposição 14. Se X é espaço topológico e B é uma base para a topologia T, então:

- $\bigsqcup B_x \leq x$.
- $\bigsqcup B_x \in T$.

Demonstração. Temos o seguinte:

- Para $b \in B$ tal que $b \leq x$, então $b \leq x$; aí $\bigsqcup B_x \leq x$.
- Temos $B_x \subseteq B \subseteq T$, aí $\bigsqcup B_x \in T$.

□

Proposição 15. Se X é espaço topológico e B é uma base para a topologia T, então:

- $1 \leq \bigsqcup B$.
- Para $x, y \in B$, então $x \sqcap y \leq \bigsqcup B_{x \sqcap y}$.

Além disso, $x \in T$ se e só se $x \leq \bigsqcup B_x$.

Demonstração. Temos o seguinte:

- Temos $1 \in T$, aí $1 \leq \bigsqcup B_1 = \bigsqcup B$.
- Para $x, y \in B$, então $x \in T$ e $y \in T$, aí $x \sqcap y \in T$, aí $x \sqcap y \leq \bigsqcup B_{x \sqcap y}$.

Além disso, se $x \in T$, então $x \leq \bigsqcup B_x$. Por outro lado, se $x \leq \bigsqcup B_x$, como $\bigsqcup B_x \leq x$, então $x = \bigsqcup B_x$, mas $\bigsqcup B_x \in T$, aí $x \in T$. $\square$

Proposição 16. Seja X um reticulado completo infinitamente distributivo por cima, e seja B uma parte de X satisfazendo as seguintes propriedades:

- $1 \leq \bigsqcup B$.
- Para $x, y \in B$, então $x \sqcap y \leq \bigsqcup B_{x \sqcap y}$.

Então B é base de uma única topologia.

Demonstração. Seja $T = \{x \in X : x \leq \bigsqcup B_x\}$. Então:

- Temos $1 \leq \bigsqcup B = \bigsqcup B_1$, aí $1 \in T$.
- Para $x, y \in T$, então $x \leq \bigsqcup B_x$ e $y \leq \bigsqcup B_y$, aí $x \sqcap y \leq \left(\bigsqcup B_x\right) \sqcap \left(\bigsqcup B_y\right) = \bigsqcup_{s \in B_x} \bigsqcup_{t \in B_y} (s \sqcap t) \leq \bigsqcup_{s \in B_x} \bigsqcup_{t \in B_y} \bigsqcup B_{s \sqcap t} \leq \bigsqcup B_{x \sqcap y}$, aí $x \sqcap y \in T$.
- Para $A \subseteq T$, então $\bigsqcup A \leq \bigsqcup_{a \in A} \bigsqcup B_a \leq \bigsqcup B_{\bigsqcup A}$, aí $\bigsqcup A \in T$.

Logo T é uma topologia. Além disso: (1) para $b \in B$, como $b \leq b$, então $b \leq \bigsqcup B_b$, aí $b \in T$; aí $B \subseteq T$; (2) para $x \in T$, então $x \leq \bigsqcup B_x$; logo B é base para T. $\square$

2.1.4 Topologias geradas

Proposição 17. Para reticulado completo X e conjunto $\mathcal{T}$ de topologias, então $\bigcap \mathcal{T}$ é uma topologia.

Definição 23. Para reticulado completo X, a interseção de todas as topologias que contêm B é chamada **topologia gerada por** B.

Proposição 18. Para reticulado completo infinitamente distributivo X e para $B \subseteq X$, o conjunto C dos elementos $\bigsqcap E$ em que E é um subconjunto finito de B é base da topologia gerada por B.

Demonstração. Temos o seguinte:

- Eis que $\emptyset$ é subconjunto finito de B e $1 = \bigsqcap \emptyset$, de modo que $1 \in C$.
- Para $x, y \in C$ existem subconjuntos finitos E e F de B tais que $x = \bigsqcap E$ e $y = \bigsqcap F$, aí $E \cup F$ é subconjunto finito de B e $x \sqcap y = \bigsqcap (E \cup F)$, aí $x \sqcap y \in C$.

Logo C é base de uma topologia T. Para toda topologia U que contém B, então para todo $x \in C$ existe um subconjunto finito E de B tal que $x = \bigsqcap E$, aí $E \subseteq U$, aí $\bigsqcap E \in U$, aí $x \in U$; logo $C \subseteq U$, aí para $x \in T$ então $C_x \subseteq C \subseteq U$, aí $x = \bigsqcup C_x \in U$; logo $T \subseteq U$. Logo T é a topologia gerada por B.

$\square$

2.1.5 Espaços topológicos booleanos

Definição 24. Seja X um espaço topológico booleano. Para $x \in X$, dizemos que x é **fechado** se e só se x^c é aberto.

Definição 25. Seja X um espaço topológico booleano e seja $x \in X$, então definimos o **fecho** de x como $x^k = x^{coc}$.

Definição 26. Seja X um espaço topológico booleano e seja $x \in X$, então dizemos que x é **denso** se e só se $x^k = 1$.

Definição 27. Seja X um espaço topológico booleano e seja $x \in X$, então definimos a **fronteira** de x como $x^\partial = x^k \sqcap x^{ck}$.

2.1.6 Compacidade abstrata

Definição 28. Para espaço topológico X e para $x \in X$, dizemos que x é **compacto** se e só se para todo $A \subseteq T$ tal que $x \leq \bigsqcup A$ então existe um $F \subseteq A$ finito tal que $x \leq \bigsqcup F$.

Proposição 19. Para espaço topológico booleano X e para $x \in X$, então x é compacto se e só se para conjunto A de fechados tal que $\bigsqcap A \leq x$ existe $F \subseteq A$ finito tal que $\bigsqcap F \leq x$.

2.2 Topologias Concretas

2.2.1 Definições iniciais

Definição 29. Dado um conjunto X, definimos uma **topologia concreta** em X como uma topologia abstrata na álgebra booleana completa $\mathcal{P}(X)$, ou seja, consiste de uma coleção τ de subconjuntos de X tal que:

- $X \in \tau$.
- Para $A, B \in \tau$ então $A \cap B \in \tau$.
- Para $\alpha \subseteq \tau$ então $\bigcup \alpha \in \tau$.

Nesse caso, dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico concreto**.

A próxima proposição é muito útil para convertermos os conceitos outrora vistos em espaços topológicos abstratos em versões equivalentes mais fáceis de se trabalharem quando tratamos de espaços topológicos concretos, tais como interior, fecho, base de topologia, e assim por diante.

Proposição 20. Para conjunto X e para $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e para $A \in \mathcal{P}(X)$, lembrando-nos da notação $\mathcal{E}_A = \{E \in \mathcal{E} : E \subseteq A\}$, então $\bigcup \mathcal{E}_A$ é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $x \in E \subseteq A$.

Corolário 2. Para espaço topológico concreto X e para $A \subseteq X$, então A^k é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que para $U \in \tau$ com $x \in U$ então tenhamos $U \cap A \neq \emptyset$.

2.2.2 Vizinhanças

Definição 30. Dado espaço topológico (X, τ) e um ponto $x \in X$ e $U \subseteq X$, dizemos que U é uma **vizinhança** de x se e só se existe um aberto $V \in \tau$ tal que $x \in V \subseteq U$.

Proposição 21. Seja X um espaço topológico, e para $x \in X$ seja $\mathcal{V}(x)$ o conjunto das vizinhanças de x. Então:

- $\mathcal{V}(x)$ é um filtro.
- Se $U \in \mathcal{V}(x)$ então $x \in U$.
- Se $U \in \mathcal{V}(x)$ então existe um $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que para todo $y \in V$ tenhamos $U \in \mathcal{V}(y)$.

Além disso, para $U \subseteq X$, então $U \in \tau$ se e só se para todo $x \in U$ tivermos $U \in \mathcal{V}(x)$.

Proposição 22. Seja X um conjunto, e seja $\mathcal{V} : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ uma função que satisfaça as seguintes propriedades:

- $\mathcal{V}(x)$ é um filtro.
- Se $U \in \mathcal{V}(x)$ então $x \in U$.
- Se $U \in \mathcal{V}(x)$ então existe um $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que para todo $y \in V$ tenhamos $U \in \mathcal{V}(y)$.

Então existe uma única topologia em relação à qual para $x \in X$ então $\mathcal{V}(x)$ seja o conjunto das vizinhanças de x.

Demonstração. Seja $\tau = \{U \subseteq X : \forall x \in U : U \in \mathcal{V}(x)\}$. Então:

1) Para $x \in X$ então $X \in \mathcal{V}(x)$; logo $X \in \tau$.

2) Para $U, V \in \tau$, então para $x \in U \cap V$ temos $x \in U$ e $x \in V$, aí $U \in \mathcal{V}(x)$ e $V \in \mathcal{V}(x)$, aí $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$; logo $U \cap V \in \tau$.

3) Para $\alpha \subseteq \tau$, então para $x \in \bigcup \alpha$ existe $U \in \alpha$ tal que $x \in U$, aí $U \in \tau$, aí $U \in \mathcal{V}(x)$, mas $U \subseteq \bigcup \alpha$, aí $\bigcup \alpha \in \mathcal{V}(x)$; aí $\bigcup \alpha \in \tau$.

Agora seja $x \in X$ e seja $U \subseteq X$.

1) Se U é vizinhança de x, então existe $V \in \tau$ tal que $x \in V \subseteq U$, aí $V \in \mathcal{V}(x)$, aí $U \in \mathcal{V}(x)$.

2) Se $U \in \mathcal{V}(x)$, então seja $V = \{y \in X : U \in \mathcal{V}(y)\}$, então:

2,1) Como $U \in \mathcal{V}(x)$, então $x \in V$.

2,2) Para $y \in V$ temos $U \in \mathcal{V}(y)$, aí $y \in U$; aí $V \subseteq U$.

2,3) Para $y \in V$ então $U \in \mathcal{V}(y)$, aí existe $W \in \mathcal{V}(y)$ tal que $\forall z \in W : U \in \mathcal{V}(z)$, aí $\forall z \in W : z \in V$, aí $W \subseteq V$, aí $V \in \mathcal{V}(y)$; logo $V \in \tau$.

Assim $x \in V \subseteq U$ e $V \in \tau$, aí U é vizinhança de x. $\square$

Definição 31. Para espaço topológico X e para $x \in X$, um conjunto de vizinhanças $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}(x)$ é dito um **sistema fundamental de vizinhanças** se e só se é um sistema fundamentel para $\mathcal{V}(x)$, isto é, para todo $U \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$.

Proposição 23. Seja X um espaço topológico, e seja $\mathcal{B} : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ uma função tal que para $x \in X$ então $\mathcal{B}(x)$ seja um sistema fundamental de vizinhanças de x. Então:

- $\mathcal{B}(x)$ é um sistema fundamental de um filtro.
- Para $U \in \mathcal{B}(x)$ então $x \in U$.
- Para $U \in \mathcal{B}(x)$ existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que para $y \in V$ exista $W \in \mathcal{B}(y)$ tal que $W \subseteq U$.

Além disso, para $U \subseteq X$, então $U \in \tau$ se e só se para todo $x \in U$ existir $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subseteq U$.

Proposição 24. Seja X um conjunto e seja $\mathcal{B} : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ satisfazendo as seguintes proprieades:

- $\mathcal{B}(x)$ é um sistema fundamental de um filtro.
- Para $U \in \mathcal{B}(x)$ então $x \in U$.
- Para $U \in \mathcal{B}(x)$ existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que para $y \in V$ exista $W \in \mathcal{B}(y)$ tal que $W \subseteq U$.

Então existe uma única topologia em relação à qual para todo $x \in X$ então $\mathcal{B}(x)$ seja um sistema fundamental de vizinhanças.

Demonstração. Para cada $x \in X$ seja $\mathcal{V}(x) = \{U \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subseteq U\}$. Então:

1) $\mathcal{V}(x)$ é um filtro.

2) Para $U \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subseteq U$, aí $x \in B$, aí $x \in U$.

3) Para $U \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subseteq U$, aí existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que tenhamos $\forall y \in V : \exists W \in \mathcal{B}(y) : W \subseteq B$, aí $V \in \mathcal{V}(x)$ e para $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}(y)$ tal que $W \subseteq B$, aí $W \subseteq U$, aí $U \in \mathcal{V}(y)$.

Logo existe uma única topologia em relação à qual para cada $x \in X$ o conjunto das suas vizinhanças seja $\mathcal{V}(x)$, aí para $x \in X$ é fácil ver que $\mathcal{B}(x)$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x. □

2.2.3 Funções Contínuas

Definição 32. Para espaços topológicos X e Y, uma função $f : X \to Y$ é dita **contínua em um ponto** $x \in X$ se e só se para todo $V \in \tau_Y$ com $f(x) \in V$ existe um $U \in \tau_X$ com $x \in U$ tal que a relação $t \in U$ implique $f(t) \in V$.

Definição 33. Para espaços topológicos X e Y, uma função $f : X \to Y$ é dita **contínua** se e só se é contínua em todo ponto $x \in X$.

2.2.4 Redes

Definição 34. Uma **rede** é uma função não vazia munida de uma preordem dirigida por cima em seu domínio.

Definição 35. Para espaço topológico X e ponto $p \in X$ e rede $x : N \to X$, dizemos que x **converge** a p se e só se para $U \in \tau$ com $p \in U$ existe $n_0 \in N$ tal que para todo $n \geq n_0$ tenhamos $x_n \in U$.

Proposição 25. Para espaço topológico X e $A \subseteq X$ e $x \in X$, então $x \in A^k$ se e só se existe uma rede de elementos de A convergindo a x.

Demonstração. Se existe uma rede a de elementos de A convergindo a x, então para $U \in \tau$ com $x \in U$ existe $n \in N$ tal que $\forall m \geq n : a_m \in U$, aí $a_n \in A$ e $a_n \in U$; logo $x \in A^k$.

Se $x \in A^k$, então para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ existe $a \in A$ tal que $a \in U$; logo, sendo $\mathcal{N} = \{U \in \tau : x \in U\}$ munido da relação $\supseteq$, então $\mathcal{N}$ é não vazio e dirigido por cima, e existe uma função $x : \mathcal{N} \to A$ tal que $\forall U \in \mathcal{N} : a_U \in U$, aí para $U \in \tau$ tal que $x \in U$ temos $U \in \mathcal{N}$ e para $V \in \mathcal{N}$, se $V \subseteq U$ então $a_V \in V \subseteq U$; logo a converge a x. $\square$

Proposição 26. Sejam X e Y espaços topológicos e seja $p \in X$ e seja $f : X \to Y$ uma função. Então f é contínua em p se e só se para toda rede x de elementos de X que converge a p, então $f \circ x$ converge a $f(p)$.

Demonstração. Se f é contínua em p, então para toda rede x convergindo a p, então para $V \in \tau$ tal que $f(p) \in V$, existe $U \in \tau$ tal que $p \in U$ e $\forall x \in U : f(x) \in V$, aí existe um $n_0 \in N$ tal que $\forall n \geq n_0 : x_n \in U$, aí $\forall n \geq n_0 : f(x_n) \in V$; logo $f \circ x$ converge a $f(p)$.

Se f não é contínua em p, então existe um $V \in \tau$ tal que $f(p) \in V$ tal que para $U \in \tau$ tal que $p \in U$ exista $x \in U$ tal que $f(x) \notin V$. Seja N o conjunto dos $U \in \tau$ tais que $p \in U$, munido da relação $\supseteq$, então N é não vazio e dirigido por cima, aí existe uma rede $x : N \to X$ tal que para $U \in N$ tenhamos $x_U \in U$ e $f(x_U) \notin V$. Para $U \in \tau$ tal que $p \in U$, então $U \in N$ e para $n \in N$ tal que $n \subseteq U$ então $x_n \in n$, aí $x_n \in U$; logo x converge a p. Além disso $V \in \tau$ e $f(p) \in V$ e para $n \in N$ então $n \subseteq n$ e $f(x_n) \notin V$; logo $f \circ x$ não converge a $f(p)$. $\square$

Definição 36. Se x é uma rede com domínio M e y é uma rede com domínio N, dizemos que x é uma **subrede** de y se e só se existe uma função $k : M \to N$ tal que:

- $x = y \circ k$.
- k é crescente.
- Para $n \in N$ existe $m \in M$ tal que $k_m \geq n$.

Proposição 27. Um espaço topológico X é compacto se e só se toda rede de elementos X tem uma subrede convergente.

Demonstração. Se X é compacto, então para rede $x : N \to X$, então existe um $o \in N$, aí para $n \in N$ seja $E_n = \{x_k : k \geq n\}$ e seja $F_n = E_n^k$, então para $M \subseteq N$ finito existe $k \in M$ tal que $\forall m \in M : m \leq k$, aí $\forall m \in M : x_k \in E_m$, aí $\forall m \in M : x_k \in F_m$, aí $x_k \in \bigcap_{m \in M} F_m$, aí $\bigcap_{m \in M} F_m \neq \emptyset$; logo temos a propriedade da interseção finita, assim $\bigcap_{n \in N} F_n \neq \emptyset$, aí existe um $p \in \bigcap_{n \in N} F_n$. Consideremos o conjunto M dos pares (U, n) tais que $U \in \tau$ e $p \in \tau$ e $x_n \in U$, munido da relação $\leq$ dada por $(U_0, n_0) \leq (U_1, n_1)$ se e só se $U_0 \supseteq U_1$ e $n_0 \leq n_1$. Então $(X, o) \in M$ e para $(U, m) \in M$ e $(V, n) \in M$ temos $U \in \tau$ e $p \in U$ e $x_m \in U$ e $V \in \tau$ e $p \in V$ e $x_n \in V$, aí $U \cap V \in \tau$ e $p \in U \cap V$ e existe um $k \in N$ tal que $m \leq k$ e $n \leq k$, aí $p \in F_k$, aí existe um $l \in N$ tal que $k \leq l$ e $x_l \in U \cap V$, assim $(U \cap V, l) \in M$ e $(U, m) \leq (U \cap V, l)$ e $(V, n) \leq (U \cap V, l)$. Logo $(M, \leq)$ é não vazio e dirigido por cima. Consideremos a rede $y : M \to X$ dada por $y_{U,n} = x_n$. Definamos $f : M \to N$ por $f(U, n) = n$. Então $y = x \circ f$ e f é crescente, e para $n \in N$ então $(X, n) \in M$ e $f(X, n) = n$. Logo y é subrede de x. Além disso, para $U \in \tau$ tal que $p \in U$, como $p \in F_o$, então existe um $n_0 \in N$ tal que $n_0 \geq o$ e $x_{n_0} \in U$, aí para $(V, n) \in M$, se $(V, n) \geq (U, n_0)$ então $V \subseteq U$ e $x_n \in V$, aí $x_n \in U$, aí $y_{V,n} \in U$; logo y converge a p. Portanto toda rede tem uma subrede convergente.

Por outro lado, se X não é compacto, então existe um conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos fechados satisfazendo a propriedade de interseção finita, ou seja, tal que para todo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ finito tenhamos $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, mas tal que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Consideremos o conjunto N dos subconjuntos finitos $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$, munido da inclusão. Então $(N, \subseteq)$ é não vazio e dirigido por cima. Além disso, pela propriedade da interseção finita, existe uma rede $x : N \to X$ tal que $\forall n \in N : x_n \in \bigcap n$. Para subrede $y : M \to X$ de x, então existe uma função $f : M \to N$ tal que $y = x \circ f$ e f seja crescente e para todo $n \in N$ exista $m \in M$ tal que $k_m \geq n$, e para todo $p \in X$ temos $p \notin \bigcap \mathcal{F}$, aí existe um $F \in \mathcal{F}$ tal que $p \notin F$, aí sendo $U = F^c$, então $U \in \tau$ e $p \in U$, e para todo $n_0 \in N$, sendo $n = n_0 \cup \{F\}$, então $n \in N$ e $n \geq n_0$ e $x_n \in \bigcap n$, aí $x_n \in F$, aí $x_n \notin U$; logo y não converge a p. Portanto x é uma rede que não possui subredes convergentes. □

2.2.5 Propriedades de separação

Definição 37. Um espaço topológico é dito **Hausdorff** se e só se para $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, então existem $U, V \in \tau$ com $x \in U$ e $y \in V$ tais que $U \cap V = \emptyset$.

Proposição 28. Um espaço topológico X é Hausdorff se e só se toda rede de elementos X converge a no máximo um elemento de X.

Demonstração. Se existe uma rede z convergindo a dois elementos distintos $x, y \in X$, então para $U, V \in \tau$, se $x \in U$ e $y \in V$, então existem $m_0, n_0 \in N$ tais que $\forall m \geq m_0 : z_m \in U$ e $\forall n \geq n_0 : z_n \in V$, aí existe $k \in N$ tal que $m \leq k$ e $n \leq k$, aí $z_k \in U$ e $z_k \in V$, aí $z_k \in U \cap V$, aí $U \cap V \neq \emptyset$; logo X não é Hausdorff

Se X não é de Hausdorff, então existem $x, y \in X$ tais que $x \neq y$ e para $U, V \in \tau$ tais que $x \in U$ e $y \in U$ tenhamos $U \cap V \neq \emptyset$, aí seja N o conjunto dos pares (U, V) tais que $U \in \tau$ e $V \in \tau$ e $x \in U$ e $y \in V$, munido da relação $\leq$ dada por $(U_0, V_0) \leq (U_1, V_1)$ se e só se $U_0 \supseteq U_1$

e $V_0 \supseteq V_1$, então $(X, X) \in N$ e para $(U_0, V_0) \in N$ e $(U_1, V_1) \in N$ então $(U_0 \cap U_1, V_0 \cap V_1) \in N$ e $(U_0, V_0) \leq (U_0 \cap U_1, V_0 \cap V_1)$ e $(U_1, V_1) \leq (U_0 \cap U_1, V_0 \cap V_1)$; logo N é não vazio e dirigido por cima. Assim existe uma rede $z : N \to X$ tal que $\forall (U, V) \in N : z_{U,V} \in U \cap V$. Para $U \in \tau$ tal que $x \in U$ então $(U, X) \in N$ e para $(V, W) \in N$ tal que $(V, W) \geq (U, X)$, então $V \subseteq U$ e aí $z_{V,W} \in V \cap W \subseteq V \subseteq U$, aí $z_{V,W} \in U$; logo z converge a x. Analogamente z converge a y. Portanto temos uma rede que converge a dois elementos distintos de X. □

2.2.6 Topologias fracas

Um tipo de topologia bastante utilizada em análise funcional é a topologia fraca. Aliás, como veremos nos exemplos, algumas construções comuns sobre espaços topológicos são casos particulares.

Definição 38. Seja X um conjunto, $(Y_i, \tau_i)_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos, e para cada $i \in I$, seja f_i uma função de X em Y_i. Então a topologia gerada pelo conjuntos $f_i^{-1}[U]$ em que $i \in I$ e $U \in \tau_i$ é chamada de **topologia fraca**.

Proposição 29. Seja X um conjunto, $(Y_i, \tau_i)_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos, e para cada $i \in I$, seja f_i uma função de X em Y_i. Consideremos a topologia fraca. Seja g uma função de um espaço topológico (Z, σ) em X e seja $z \in Z$. Se cada uma das funções $f_i \circ g$ é contínua em z, então g é contínua em z.

Demonstração. Para toda vizinhança V de $g(z)$, então existe um natural n e sequências $(i_k)_{k<n}$ e $(U_k)_{k<n}$ tais que $\forall k < n : (i_k \in I \text{ e } U_k \in \tau_{i_k})$ e $g(z) \in \bigcap\limits_{k<n} f_{i_k}^{-1}[U_k] \subseteq V$, aí $z \in g^{-1}[\bigcap\limits_{k<n} f_{i_k}^{-1}[U_k]] \subseteq g^{-1}[V]$, mas $g^{-1}[\bigcap\limits_{k<n} f_{i_k}^{-1}[U_k]] = \bigcap\limits_{k<n} g^{-1}[f_{i_k}^{-1}[U_k]] = \bigcap\limits_{k<n} (f_{i_k} \circ g)^{-1}[U_k] \in \sigma$; logo g é contínua em z. □

Exemplo 3. Topologia induzida num subconjunto
Para espaço topológico X e subconjunto Y, a **topologia induzida em Y pela de X** é a topologia fraca em Y em relação à inclusão canônica $\iota : Y \to X$.

Exemplo 4. Topologia produto
Para família $(X_i)_{i \in I}$ de espaços topológicos, a **topologia produto** é a toplogia fraca sobre o produto $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ em relação às projeções $\pi_i : X \to X_i$.

2.3 Espaços Uniformes

2.3.1 Conceitos iniciais e exemplos

Definição 39. Um **espaço uniforme** é um par (X, Φ), em que X é um conjunto e Φ é um conjunto de partes de $X \times X$ satisfazendo:

- Φ é um filtro.

- Para $U \in \Phi$, então $U^{-1} \in \Phi$.
- Para $U \in \Phi$, então $\Delta \subseteq U$.
- Para $U \in \Phi$, existe um $V \in \Phi$ tal que $V \circ V \subseteq U$ ("desigualdade triangular").

Os elementos de Φ são chamados **entornos**.

Definição 40. Num espaço uniforme X, dizemos que um entorno $U \in \Phi$ é **simétrico** se e só se $U \subseteq U^{-1}$.

Definição 41. Dado espaço uniforme (X, Φ), um conjunto de entornos $\mathscr{B} \subseteq \Phi$ é dito um **sistema fundamental de entornos** se e só se é um sistema fundamental para Φ, isto é, para todo $U \in \Phi$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subseteq U$.

Proposição 30. Dado espaço uniforme X, então o conjunto Ψ dos entornos simétricos é um sistema fundamental de entornos.

Demonstração. Por definição temos $\Psi \subseteq \Phi$. Além disso, para todo entorno $U \in \Phi$ então $U^{-1} \in \Phi$, aí $U \cap U^{-1} \in \Phi$ é um entorno simétrico contido em U. $\square$

Proposição 31. Seja X um conjunto e $\mathcal{B}$ um conjunto de partes de $X \times X$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de um filtro.
- Para $U \in \mathcal{B}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq U^{-1}$.
- Para $U \in \mathcal{B}$ então $\Delta \subseteq U$.
- Para $U \in \mathcal{B}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \circ V \subseteq U$.

Então $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de entornos de uma única uniformidade.

Definição 42. Um **espaço pseudométrico** é um par (X, d), onde X é um conjunto e $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

- $d(x, x) = 0$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

Um espaço pseudométrico é dito **métrico** se e só se satisfaz a propriedade adicional:

- Se $d(x, y) = 0$, então $x = y$.

Proposição 32. Para espaço pseudométrico X, para $x, y \in X$ temos $d(x, y) \geq 0$.

Demonstração. Para $x, y \in X$, pela desigualdade triangular temos $d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x)$, mas $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = d(y, x)$, aí $2d(x, y) \geq 0$, aí $d(x, y) \geq 0$. $\square$

Proposição 33. Dado espaço pseudométrico X, se para $\varepsilon > 0$ definirmos U_ε o conjunto dos (x, y) tais que $d(x, y) < \varepsilon$, então $\mathcal{B} = \{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ é um sistema fundamental de entornos de uma única uniformidade, que chamaremos de **uniformidade induzida pela pseudométrica**.

Demonstração. Temos o seguinte:

1) Temos $1 > 0$, aí $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

2) Para $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ temos $U_{\varepsilon_0} \cap U_{\varepsilon_1} = U_{\min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)}$.

3) Para ε então $U_\varepsilon^{-1} = U_\epsilon$.

4) Para $\varepsilon > 0$ então para $x \in X$ temos $d(x, x) = 0 < \varepsilon$, aí $(x, x) \in U_\varepsilon$.

5) Para $\varepsilon > 0$ temos $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ e $U_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ U_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq U_\varepsilon$. □

2.3.2 Topologia induzida por uniformidade

Definição 43. Seja (X, Φ) um espaço uniforme. Então a **bola** de centro $x \in X$ e raio $U \in \Phi$ é o conjunto

$$B(x, U) = \{x \in X : (x, t) \in U\}$$

Proposição 34. Seja X um espaço uniforme. Então existe uma única topologia em relação à qual para cada $x \in X$ o conjunto $\{B(x, U) : U \in \Phi\}$ seja um sistema fundamental de vizinhanças. Chamamo-la de **topologia induzida pela uniformidade**.

Demonstração. Temos as seguintes propriedades:

1) Temos $X \times X \in \Phi$ e $X = B(x, X \times X)$.

2) Para $U, V \in \Phi$, então $U \cap V \in \Phi$ e $B(x, U) \cap B(x, V) = B(x, U \cap V)$.

3) Para $U \in \Phi$, então $(x, x) \in U$, aí $x \in B(x, U)$.

4) Para $U \in \Phi$, então existe $V \in \Phi$ tal que $V \circ V \subseteq U$, aí para $y \in B(x, V)$ então $(x, y) \in V$, aí para $t \in B(y, V)$ temos $(y, t) \in V$, aí $(x, t) \in U$, aí $t \in B(x, U)$; aí $B(y, V) \subseteq B(x, U)$.

Logo existe uma única topologia em relação à qual para $x \in X$ o conjunto $\{B(x, U) : U \in \Phi\}$ seja um sistema fundamental de vizinhanças. □

Proposição 35. Para espaço uniforme X e para $x \in X$, então o conjunto das vizinhanças de X é exatamente $\{B(x, U) : U \in \Phi\}$.

Demonstração. Para $U \in \Phi$ e $W \subseteq X$, se $B(x, U) \subseteq W$, seja V o conjunto dos pares $(s, t) \in X \times X$ tais que a relação $s = x$ implique $t \in W$, então $U \subseteq V$, aí $V \in \Phi$ e $W = B(x, V)$. □

2.3.3 Funções uniformemente contínuas

Definição 44. Para espaços uniformes X e Y, uma função $f : X \to Y$ é dita **uniformemente contínua** se e só se para todo entorno $V \in \Phi_Y$ existe um entorno $U \in \Phi_X$ tal que a relação $(x, y) \in U$ implique $(f(x), f(y)) \in V$.

Proposição 36. Dados espaços uniformes X e Y, considerando suas topologias induzidas, então toda função uniformemente contínua $f : X \to Y$ é contínua.

Demonstração. Para $x \in X$, então para $V \in \Phi_Y$ existe $U \in \Phi_X$ tal que a relação $(s, t) \in U$ implique $(f(s), f(t)) \in V$, aí para $t \in B(x, U)$ temos $(x, t) \in U$, aí $(f(x), f(t)) \in V$, aí $f(t) \in B(f(x), V)$; logo f é contínua. □

2.3.4 Espaços uniformes completos

Definição 45. Num espaço uniforme X, uma **rede de Cauchy** é uma rede $x : N \to X$ tal que para todo entorno $U \in \Phi$ existe $p \in N$ tal que para quaisquer $m, n \geq p$ tenhamos $(x_m, x_n) \in U$.

Proposição 37. Num espaço uniforme X, toda rede convergente é de Cauchy

Demonstração. Seja Ψ o conjunto dos entornos simétricos. Se $x : N \to X$ é uma rede convergente, digamos a algum $l \in X$, então para $U \in \Psi$ existe $V \in \Psi$ tal que $V \circ V \subseteq U$, aí existe $p \in N$ tal que para $m \geq p$ tenhamos $(l, x_m) \in V$, assim para $m, n \geq p$ temos $(l, x_m) \in V$ e $(l, x_n) \in V$, aí $(x_m, x_n) \in U$; logo x é rede de Cauchy. □

Definição 46. Um espaço uniforme é dito **completo** se e só se toda rede de Cauchy é convergente.

2.3.5 Espaços de funções

Definição 47. Denotaremos o conjunto das funções de X a Y por $\mathcal{F}(X, Y)$.

Proposição 38. Seja X um conjunto e seja Y um espaço uniforme. Para $U \in \Phi$ seja T_U o conjunto de pares de funções (f, g) tais que $\forall x \in X : (f(x), g(x)) \in U$. Então o conjunto $\{T_U : U \in \Phi\}$ é um sistema fundamental de entornos de uma única uniformidade. Chamaremos essa uniformidade de **estrutura da convergência uniforme**, e chamamos sua topologia induzida de **topologia da convergência uniforme**.

Demonstração. Temos o seguinte:

1) Temos $Y \times Y \in \Phi$ e $\mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(X, Y) = T_{Y \times Y}$.

2) Para $U, V \in \Phi$ temos $U \cap V \in \Phi$ e $T_U \cap T_V = T_{U \cap V}$.

3) Para $U \in \Phi$ então $U^{-1} \in \Phi$ e $T_U^{-1} = T_{U^{-1}}$.

4) Para $U \in \Phi$ então para $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ temos $\forall x \in X : (f(x), f(x)) \in U$, aí $(f, f) \in T_U$.

5) Para $U \in \Phi$ existe $V \in \Phi$ tal que $V \circ V \subseteq U$, aí se $(f, g) \in T_V$ e $(g, h) \in T_V$, então para $x \in X$ temos $(f(x), g(x)) \in V$ e $(g(x), h(x)) \in V$, aí $(f(x), h(x)) \in U$; aí $(f, h) \in T_U$. □

Proposição 39. Seja X um conjunto e seja Y um espaço uniforme. Seja $f : N \to \mathcal{F}(X,Y)$ uma rede de Cauchy e seja $g \in \mathcal{F}(X,Y)$ tais que para todo $x \in X$ a rede $(f_n(x))_{n\in N}$ convirja para $g(x)$. Então f converge a g.

Demonstração. Para $U \in \Phi$ existe $V \in \Phi$ tal que $V \circ V \subseteq U$, aí existe $p \in N$ tal que $\forall m,n \geq p : (f_m, f_n) \in T_V$, aí para $n \geq p$ então para $x \in X$ existe $p' \in N$ tal que $\forall m \geq p' : (g(x), f_m(x)) \in V$, aí existe $p'' \in N$ tal que $p'' \geq p, p'$, aí $(g(x), f_{p''}(x)) \in V$ e $(f_{p''}, f_n) \in T_V$, aí $(f_{p''}(x), f_n(x)) \in V$, aí $(g(x), f_n(x)) \in U$; logo $(g, f_n) \in T_U$; logo f converge a g. □

Proposição 40. Seja X um conjunto e seja Y um espaço uniforme completo. Então o conjunto $\mathcal{F}(X,Y)$, munido da estrutura da convergência uniforme, é um espaço uniforme completo.

Demonstração. Seja $f : N \to \mathcal{F}(X,Y)$ uma rede de Cauchy. Para $x \in X$ então para $U \in \Phi$ existe $p \in N$ tal que $\forall m,n \geq p : (f_m, f_n) \in T_U$, aí para $m,n \geq p$ temos $(f_m, f_n) \in T_U$, aí $(f_m(x), f_n(x)) \in U$; logo $(f_n(x))_{n\in N}$ é uma rede de Cauchy, aí converge. Portanto existe uma função $g \in \mathcal{F}(X,Y)$ tal que para todo $x \in X$ a rede $(f_n(x))_{n\in N}$ convirja a $g(x)$. Pela proposição anterior, f converge a g. □

Definição 48. Para conjunto X e espaço uniforme Y e para conjunto $\Theta \subseteq \Phi$ de entornos, então denotaremos por $\mathcal{B}_\Theta(X,Y)$ o conjunto das funções $f \in \mathcal{F}(X,Y)$ tais que exista $U \in \Theta$ tal que $\forall x,y \in X : (f(x), f(y)) \in U$. Chamá-las-emos de **funções limitadas** por Θ.

Proposição 41. Seja X um conjunto e seja Y um espaço uniforme. Seja $\Theta \subseteq \Phi$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $\Theta \neq \emptyset$.
- Para $U \in \Theta$ então existe $V \in \Theta$ tal que $U^{-1} \subseteq V$.
- Para $U, V \in \Theta$ então existe $W \in \Theta$ tal que $U \circ V \subseteq W$.

Então $\mathcal{B}_\Theta(X,Y)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{F}(X,Y)$.

Demonstração. Seja $f \in (\mathcal{B}_\Theta(X,Y))^k$. Existe um $U \in \Theta$, aí existe $g \in \mathcal{B}_\Theta(X,Y)$ tal que $(f,g) \in T_U$, aí existe $V \in \Theta$ tal que $\forall x,y \in X : (g(x), g(y)) \in V$, aí existe $W \in \Theta$ tal que $U^{-1} \circ V \circ U \subseteq W$, aí para $x,y \in X$ temos $(g(x), g(y)) \in V$, mas $(f(x), g(x)) \in U$ e $(g(y), f(y)) \in U^{-1}$, aí $(f(x), f(y)) \in U^{-1} \circ V \circ U$, aí $(f(x), f(y)) \in W$; logo $f \in \mathcal{B}_\Theta(X,Y)$. □

Definição 49. Para espaço topológico X e espaço uniforme Y, denotaremos o conjunto das funções contínuas de X a Y por $\mathcal{C}(X,Y)$.

Proposição 42. Seja X um espaço topológico e seja Y um espaço uniforme. Então $\mathcal{C}(X,E)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{F}(X,Y)$.

Demonstração. Seja Ψ o conjunto dos entornos simétricos de Φ. Seja $f \in (\mathcal{C}(X,E))^k$. Então para $x \in X$, para $U \in \Psi$ existe $V \in \Psi$ tal que $V \circ V \circ V \subseteq U$, aí existe $g \in \mathcal{C}(X,Y)$ tal que $(f,g) \in T_V$, aí existe $W \in \tau$ com $x \in W$ tal que $\forall t \in W : g(t) \in B(g(x),V)$, aí para $t \in W$ então $(g(x),g(t)) \in V$, mas $(f(x),g(x)) \in V$ e $(g(t),f(t)) \in V$, aí $(f(x),f(t)) \in U$; logo $f \in \mathcal{C}(X,Y)$. $\square$

Definição 50. Para espaços uniformes X e Y, denotaremos o conjunto das funções uniformemente contínuas por $\mathcal{U}(X,Y)$.

Proposição 43. Sejam X e Y um espaços uniformes. Então $\mathcal{U}(X,Y)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{F}(X,Y)$.

Demonstração. Seja Ψ_Y o conjunto dos entornos simétricos de Φ_Y. Seja $f \in (\mathcal{U}(X,Y))^k$. Então para $U \in \Psi_Y$ existe $V \in \Psi_Y$ tal que $V \circ V \circ V \subseteq U$, aí existe $g \in \mathcal{U}(X,Y)$ tal que $(f,g) \in T_V$, aí existe $W \in \Phi_X$ tal que a relação $(x,y) \in W$ implique $(g(x),g(y)) \in V$, aí para $(x,y) \in W$ então $(g(x),g(y)) \in V$, mas $(f(x),g(x)) \in V$ e $(g(y),f(y)) \in V$, aí $(f(x),f(y)) \in U$; logo $f \in \mathcal{U}(X,Y)$. $\square$

2.3.6 Completamento de Hausdorff

Teorema 1. Seja X um espaço uniforme. Então existem um espaço uniforme completo Hausdorff $\hat{X}$ e uma função uniformemente contínua $i : X \to \hat{X}$ tal que, para toda função uniformemente contínua f de X num espaço uniforme completo Hausdorff Y, exista uma única função uniformemente contínua $\hat{f} : \hat{X} \to Y$ tal que $f = \hat{f} \circ i$.

Demonstração. A demonstração é um tanto longa. Mas eia avante!

$\square$

Capítulo 3

Espaços Métricos

Definição 51. Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto e $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

- $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

Exemplo 5. $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a distância euclidiana usual;

Exemplo 6. $(\mathbb{R}^n, d)$, onde d é a distância euclidiana usual:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$.

Exemplo 7. $(\mathbb{R}, d_M)$, onde d_M é a chamada *métrica de Manhattan*, sendo definida por:

$$d_M(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Em geral, pode-se definir esta métrica em $\mathbb{R}^n$:

$$d_M(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$.

Exemplo 8. Seja X o espaço de todas as sequências limitadas de números reais. Então, (X, d_{sup}) é um espaço métrico, para

$$d_{sup}(x, y) = \sup\{|a_j - b_j| \colon j \in \mathbb{N}\}$$

Este espaço é o famoso ℓ_∞.

Exemplo 9. Vamos generalizar o exemplo anterior. Considere todas as sequências de números reais $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que

$$||(a_i)||_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

O conjunto de todas as sequências que satisfazem essa condição são chamados espaços ℓ_p.

Exemplo 10. Seja $\mathcal{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua.}\}$. $(\mathcal{C}([a,b]), d)$ é um espaço métrico para

$$d(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [a,b]\}$$

Exemplo 11. Seja $\mathcal{B}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ é limitada.}\}$. Então $(\mathcal{B}([a,b]), d)$ é um espaço métrico para

$$d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [a,b]\}$$

Exemplo 12. Antes de apresentar este exemplo, vamos definir o que é uma função de variação limitada. Para função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definimos a variação $v(f)$ como:

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\} \text{ é uma partição de } [a,b].\right\}$$

Dizemos que f tem variação limitada se e só se $v(f) < \infty$. Nem toda função contínua possui variação limitada, como por exemplo $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Seja $\mathcal{BV}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ tem variação limitada.}\}$. Então $(\mathcal{BV}([a,b]), d)$ é um espaço métrico para

$$d(f,g) = v(f-g) + |f(a) - g(a)|$$

Exemplo 13. Seja $X = \{(a_1, a_2, \ldots), a_i \in \mathbb{C}, i \in \mathbb{N}\}$. Então,

$$d(x,y) = \sum_{J=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|a_j - b_j|}{1 + |a_j - b_j|}$$

é uma métrica.

Definição 52. Se $A, B \subset M$, então a distância entre A e B é dada por

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

Definição 53. Dado um espaço métrico (M,d), então é possível obter um espaço métrico $(S,\tilde{d})$, onde $S \subset M$, e $\tilde{d} = d\restriction_S$.

Definição 54. Seja (M,d) um espaço métrico. Então uma *bola aberta* de centro a e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto

$$B(a,\varepsilon) = \{x \in M : d(a,x) < \varepsilon\}$$

Definição 55. Um subconjunto A de M num espaço métrico (M,d) é chamado *aberto* em M se $\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \subseteq A$.

Um subconjunto F de M é dito *fechado* se $F^{\complement}$ é aberto.

Exemplo 14.

Teorema 2 (Teorema de Baire)**.** Seja (M,d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não vazio.

Capítulo 4

Espaços normados

Definição 56. Seja X um espaço vetorial sobre K. [1] Uma *norma* em X é uma função $||.|| \colon X \to [0, +\infty[$ tal que, $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in K$:

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $|\alpha|||x|| = ||\alpha x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$(X, ||.||)$ é chamado *espaço normado.*

Definição 57. A métrica induzida pela norma $||.||$ é dada por

$$d(x, y) = ||x - y||$$

Observação 1. Do item 3, pode-se também deduzir a seguinte identidade $\forall x, y \in X$:

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$$

Observação 2. Num espaço vetorial real X , uma métrica d é proveniente de uma norma se e somente se para $x, a \in X$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários, se verifica $d(x + a, y + a) = d(x, y)$ (invariância por translações) e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Exemplo 15. Seja $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in K\}$. Então, $(K^n, ||.||_2)$ é um espaço normado com a norma dada por

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

[1] Usualmente vamos considerar $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Outras normas para K^n são

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{e} \quad ||x||_\infty = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$$

Em geral,

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma em K^n.

Exemplo 16. Seja $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua.}\}$. Então,

$$||f||_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$$

torna $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ um espaço normado.

Exemplo 17. Considere $\ell_\infty = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in K \wedge \sup\{|x_i|, i \in \mathbb{N}\} < \infty\}$, o espaço das sequências limitadas em K. Então,

$$||x|| = \sup\{|x_i|, i \in \mathbb{N}\}$$

é uma norma.

Proposição 44. Seja X um espaço vetorial sobre K, e seja $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\|ax + by\| \leq |a|\|x\| + |b|\|y\|$.
2. Se $\|x\| = 0$ então $x = 0$.

Então $\|\cdot\|$ é uma norma.

Demonstração. Vamos dividir em etapas:

1. Mostraremos que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. De fato temos $\|1x + 1y\| \leq |1|\|x\| + |1|\|y\|$, aí $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
2. Mostraremos que $\|0\| = 0$. Temos $\|0 \cdot 0 + 0 \cdot 0\| \leq |0|\|0\| + |0|\|0\|$, aí $\|0\| \leq 0$, além disso, por (1) temos $\|0 + 0\| \leq \|0\| + \|0\|$, aí $\|0\| \leq 2\|0\|$, aí $0 \leq \|0\|$, assim $\|0\| = 0$.
3. Mostraremos que $\|x\| \geq 0$. Por (1) temos $\left\|1x + (-1)x\right\| \leq |1|\|x\| + |-1|\|x\|$, aí $\|0\| \leq 2\|x\|$, aí por (2) temos $2\|x\| \geq 0$, aí $\|x\| \geq 0$.
4. Mostraremos que se $k \neq 0$ então $\|kx\| = |k|\|x\|$. Para k e x então $\|kx + 0 \cdot 0\| \leq |k|\|x\| + |0|\|0\|$, aí $\|kx\| \leq |k|\|x\|$. Logo, para k e x, se $k \neq 0$ então $\left\|\frac{1}{k} \cdot kx\right\| \leq \left|\frac{1}{k}\right|\|kx\|$, aí $\|x\| \leq \frac{1}{|k|}\|kx\|$, aí $|k|\|x\| \leq \|kx\|$, mas também $\|kx\| \leq |k|\|x\|$, aí $\|kx\| = |k|\|x\|$.

$\square$

4.1 Topologia da norma

Definição 58. Seja $(X, ||.||)$ um espaço normado. Dado $a \in X$ e $r > 0$, dizemos que

$$B(a;r) = \{x \in X : ||x - a|| < r\}$$

é a *bola aberta* de centro a e raio $r > 0$.

Definição 59. Seja $(X, ||.||)$ um espaço normado. Um subconjunto $U \subseteq X$ é chamado *aberto* se:

$$\forall a \in U \exists \varepsilon > 0 : B(a;\varepsilon) \subseteq U$$

Um subconjunto $V \subseteq X$ é chamado *fechado* se $V^{\complement}$ é aberto.

Definição 60. Seja $\|.\|$ uma norma num espaço vetorial X. Então, a topologia gerada por $\|.\|$, é a topologia que possui como base de abertos as bolas abertas da forma

$$B(a;\varepsilon) = \{x \in X : ||x - a|| < \varepsilon\}$$

$\forall a, \varepsilon \in X$.

Definição 61. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\geq 0}$ em um espaço normado $(X, ||.||)$ converge para $x \in X$ se

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0.$$

Definição 62. Seja M um espaço métrico. $f\colon X \to M$ é contínua em $x_0 \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B(x_0;\delta)) \subseteq B_d(f(x_0);\varepsilon)$$

Usando a definição 62, podemos mostrar que a norma é uma função contínua, como visto em

Proposição 45. Seja $(X, ||\,.\,||)$ um espaço normado. Então, as funções

1. $$\begin{array}{cccc} \|.\| & : & X & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

2. $$\begin{array}{ccccc} S & : & X \times X & \longrightarrow & X \\ & & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

3. $$\begin{array}{ccccc} M & : & K \times X & \longrightarrow & X \\ & & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha x \end{array}$$

são contínuas.

Demonstração. 1. Considere a bola

$$B(x_0;\varepsilon) = \{y \in X : \|x_0 - y\| < \varepsilon\}.$$

Como $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, então

$$y \in B(x_0;\varepsilon) \iff \|x_0 - y\| < \varepsilon \Rightarrow |\|x_0\| - \|y\|| \leq \|x_0 - y\| < \varepsilon$$

Logo, $\|\centerdot\|(B(x_0;\varepsilon)) \subseteq (\|x_0\| - \varepsilon, \|x_0\| + \varepsilon)$. Assim, pela definição 62, a função é contínua.

2. Consideremos em $X \times X$ a topologia produto. Seja $(x_0, y_0) \in X \times X$, e $\varepsilon > 0$. Considere o aberto $W = B\left(x_0; \frac{\varepsilon}{2}\right) \times B\left(y_0; \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Note que $(x_0, y_0) \in W$. Além disso, $S(W) \subseteq B\left(x_0 + y_0; \varepsilon\right)$, pois

$$(x, y) \in W \implies \begin{cases} \|x - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \|y - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\left\|S(x,y) - (x_0 + y_0)\right\| = \left\|(x+y) - (x_0 + y_0)\right\| = \left\|(x - x_0) + (y - y_0)\right\| \leq$$

$$\|x - x_0\| + \|y - y_0\| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, concluímos que $S(W) \subseteq B(S(x_0 + y_0), \varepsilon)$. Logo, S é contínua.

□

Definição 63. Seja $A \subseteq X$. O *fecho* de A é dado por

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_n)_{n \geq 0} : (\forall n : x_n \in A \wedge \lim_{n \to \infty} x_n = x)\}$$

Observação 3. A é fechado se e somente se $\overline{A} = A$.

Proposição 46. Seja $(X, \|\centerdot\|)$ um espaço normado, e considere $W \subset X$ um subespaço vetorial. Então $\overline{W}$ é um subespaço vetorial de X.

Demonstração. 1. $0 \in \overline{W}$, pois $W \subseteq \overline{W}$.

2. Vamos mostrar que, se $x, y \in \overline{W}$, então $x + y \in \overline{W}$. De fato, se $x, y \in \overline{W}$, então por definição, existem sequências $(x_n)_{n \geq 0}$ e $(y_n)_{n \geq 0}$ tais que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ e $\lim_{n \to \infty} y_n = y$, respectivamente. Então, como W é um subespaço vetorial, $(x_n + y_n)_{n \geq 0} \in W$.

□

Definição 64. Seja $(X, \|\centerdot\|)$ um espaço normado. Um conjunto $K \subseteq X$ é chamado *compacto* se toda sequência $(x_n)_{n \geq 0} \in K$ admite subsequência convergente para umm ponto de K.

Exemplo 18. O conjunto $[0,1]$ é compacto em $\mathbb{R}$, pois toda sequência nese conjunto admite uma subsequência convergente. Já o conjunto $(0,1]$ não é compacto em $\mathbb{R}$, pois a sequência $(x_n)_{n\geq 0}$ dada por $x_n = \frac{1}{2^n}$ converge para 0, que não está em $(0,1]$. Em geral, pelo Teorema de Heine-Borel, um conjunto em $\mathbb{R}^n$ é compacto se e somente se é fechado e limitado.

Exemplo 19. Considere agora o espaço ℓ_∞. O conjunto $C = \overline{B(0,1)}$ é fechado e limitado. Porém, não é compacto. Com efeito, tome a sequência $(e_i)_{i\in I}$, onde $(e_i)_j = \delta_{ij}$ (ou seja, a entrada i da sequência vale 1 e as demais valem 0. por exemplo, $e_2 = (0,1,0,0,\ldots)$). Note que $\left\|e_i - e_j\right\| = 1$ se $i \neq j$. Dessa forma, $(e_i)_{i\in I}$ não admite subsequência convergente.

Definição 65. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado. Um conjunto $A \subseteq X$ é chamado *convexo* se dados $x, y \in A$, então

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Proposição 47. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado. Então

(i) $B(x;r)$ é convexo para todo $x \in X, r \geq 0$.

(ii) Se $A \subseteq X$ é convexo, então $\overline{A}$ é convexo.

Demonstração. (i) Sejam $a, b \in B(x;r)$. Então,

$$\left\|x - \lambda a + (1-\lambda)b\right\| \leq \left\|x - \lambda a + x - (1-\lambda)b\right\| \leq \|x - \lambda a\| + \left\|x - (1-\lambda)b\right\| \leq$$

$$\|x-a\| + \|x-b\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \Rightarrow \boxed{\lambda a + (1-\lambda)b \in B(x;r)}$$

Logo, $B(x;r)$ é convexo.

(ii) Sejam $x, y \in \overline{A}$. Então, por definição, x e y são limites de sequências de A. Considere então $(x_n)_{n\geq 0}$ e $(y_n)_{n\geq 0}$ sequências em A tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Como A é convexo, sabemos que

$$\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in A, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Como $A \subseteq \overline{A}$, segue que $\forall \lambda \in [0,1]:$

$$\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in \overline{A} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \in \overline{A} \Rightarrow$$

$$\lambda \lim_{n\to\infty} x_n + (1-\lambda)\lim_{n\to\infty} y_n \in \overline{A} \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{A}$$

Portanto, $\overline{A}$ é convexo.

□

Definição 66. Seja X um espaço vetorial. Duas normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ são ditas *equivalentes* se $\exists \alpha, \beta > 0$ tais que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in X$$

Como notação, adotamos $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$.

Proposição 48. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes se e somente se as topologias $\tau_{\|\cdot\|_1}$ e $\tau_{\|\cdot\|_2}$ respectivamente geradas pelas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ (como definido em 60 são a mesma.

Demonstração. Para mostrar que duas topologias são a mesma (ou seja, possuem os mesmo conjuntos abertos), precisamos verificar que cada elemento da base de uma topologia está contido em um elemento da base da outra.

($\Rightarrow$) Como $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$, então existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$. Seja $U \in \tau_{\|\cdot\|_1}$. Dado $x_0 \in U$, existe um $r > 0$ tal que $B_{\|centerdot\|_1}(x_0; r) \subseteq U$. Como $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, se $\|x\|_2 \leq \alpha r$, então $\|x\|_1 \leq r$. Logo,

$$B_{\|x\|_2}(x_0; \alpha r) \subseteq B_{\|x\|_1}(x_0; r) \subseteq U$$

Portanto, $U \in \tau_{\|\cdot\|_2}$. Logo, todo aberto U em $\tau_{\|\cdot\|_1}$ é também aberto em $\tau_{\|\cdot\|_2}$.

($\Leftarrow$) Se $\tau_{\|\cdot\|_1} = \tau_{\|\cdot\|_2}$, considere $B_{\|\cdot\|_1}(0; 1)$, que é um aberto em $\tau_{\|\cdot\|_1}$. Então, $\exists r > 0$ tal que $B_{\|\cdot\|_2}(0; r) \subseteq B_{\|\cdot\|_1}(0; 1)$.

Seja $x \in B_{\|\cdot\|_2}(0; r)$. Então, $\|x\|_2 < r$ e $\|x\|_1 < 1$. Dessa forma,

$$\begin{cases} \left\| \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = \frac{r}{2} < r \\ \left\| \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_1 < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{2}\|x\|_1 \leq \|x\|_2.$$

Tomando $\alpha = \frac{r}{2}$, temos que $\alpha\|x\|_1 < \|x\|_2$. De maneira análoga, mostra-se que existe um $\beta > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Logo, $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$.

□

Exemplo 20. As normas $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, e $\|\cdot\|_\infty$ são equivalentes.

Capítulo 5

Espaços de Banach

Definição 67. Um espaço normado $(X, \|\centerdot\|)$ é chamado *espaço de Banach* se toda sequência de Cauchy converge em X com a métrica induzida.

Em suma, um espaço de Banach é um espaço vetorial normado e completo.

Exemplo 21. $(K, \|\centerdot\|_2)$ é de Banach.

Exemplo 22. Considere $X \neq \emptyset$ um compacto Hausdorff. Seja

$$\mathcal{C}(X, K) = \{f \colon X \to K | f \text{ é contínua}\}$$

e tome a norma

$$||f||_\infty = \max\{|f(t)| : t \in K\}$$

Vamos mostrar que $Y = (\mathcal{C}(X, K), \|\centerdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Da fato, seja $(f_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de Cauchy em Y, isto é:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n > n_0, \|f_n - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

Assim,

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad \forall t \in X$$

é uma sequência de Fixando $t \in X$, $(f_n(t))_{n\geq 0}$ é uma sequência de Cauchy em K, e portanto convergente. Tome $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$. Veja que $f_n \to f$, pois fixando $m = n_0 + 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(t) - f_m(t)| = |f(t) - f_{n_0+1}(t)| < \varepsilon$$

Portanto $\left\|f - f_{n_0+1}\right\|_\infty < \varepsilon$, e $f_n \to f$ em $\|\centerdot\|_\infty$.

Além disso, $f \in Y$, pois pela convergência uniforme, como todas as f_n são contínuas, f também deve ser contínua.

Exemplo 23. $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, com $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$ é um espaço de Banach.

Vamos verificar que ℓ_∞ é completo. Seja $(x_n^k)_{n\geq 0}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_∞, ou seja, $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots)$, onde $x_1^k, x_2^k, \ldots$ são sequências em ℓ_∞. Sendo $(x_n^k)_{n\geq 0}$ de Cauchy, temos que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0,\ \left\|x^k - x^\ell\right\|_\infty < \varepsilon$$

Logo, $|x_i^k - x_i^\ell| < \varepsilon$. Assim, fixando $i \in \mathbb{N}$, $(x_i^k)_{k\geq 0}$ é de Cauchy em K, e portanto convergente. Seja $x_i = \lim\limits_{k\to\infty} x_i^k$. Consideremos $x = (x_i)$. Então:

(i) $x \in \ell_\infty$, pois fixando $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i^k - x_i^\ell| \leq \left\|x_i^k - x_i^\ell\right\|_\infty < \varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}$.

Tomando $k = n_0$, $|x_i^{n_0} - x_i^\ell| < 1\ \forall \ell > n_0, \forall i \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$\lim_{\ell\to\infty} |x_i^{n_0} - x_i^\ell| = |x_i^{n_0} - x_i| \leq 1.$$

Assim,

$$|x_i| \leq |x_i^{n_0} - x_i| + |x_i^{n_0}| \leq 1 + \left\|x_i^{n_0}\right\|_\infty, \forall i \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é limitado e pertence a ℓ_∞.

(ii) $x^k \to x$ em ℓ_∞, pois $\forall \varepsilon.0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k, \ell \geq n_0, |x_i^k - x_i^\ell| < \varepsilon$. Assim:

$$\lim_{\ell\to\infty} |x_i^k - x_i^\ell| = |x_i^k - x_i| < \varepsilon \Rightarrow \|x_k - x\|_i nfty < \varepsilon, \forall k \geq n_0$$

Logo, $x^k \to x$.

Dessa forma, toda sequência de Cauchy em ℓ_∞ converge.

Note que nos últimos dois exemplos, a chave para demonstrar que o espaço era completo foi "decompor"cada termo das sequências em suas coordenadas e usar o fato de que elas são convergentes em cada coordenada. Ou seja, tomando como exemplo a sequência $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_\infty$, dada por

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{16}, 2, \ldots\right)\\
x_2 &= \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, 2, \tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{9}, 2\sqrt{2}, \ldots\right)\\
x_3 &= \left(\tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{3\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{27}, \tfrac{9}{64}, 3\sqrt{2}, \ldots\right)\\
x_4 &= \left(\tfrac{1}{16}, \tfrac{4}{5}, 2\sqrt{2}, \tfrac{1}{81}, \tfrac{4}{25}, 4\sqrt{2-\sqrt{2}}, \ldots\right)\\
&\vdots\\
x_n &= \left(\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{n}{n+1}, n\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{n}\right), \tfrac{1}{3^n}, \tfrac{n^2}{4(n+1)^2}, 2n\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right), \ldots\right)
\end{aligned}$$

ou seja:

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{k+5}{3}\right)^n}, & \text{se } k \equiv 1 \pmod 3; \\ \frac{n^{\frac{k+1}{3}}}{\left(\frac{(k+1)(n+1)}{3}\right)^{\frac{k+1}{3}}}, & \text{se } k \equiv 2 \pmod 3; \\ \frac{kn}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{kn}\right), & \text{se } k \equiv 0 \pmod 3; \end{cases}$$

Tal sequência exótica converge para

$$x = \left(0, 1, \pi, 0, \frac{1}{4}, \pi, 0, \frac{1}{27}, \pi, \dots\right)$$

Note que ocorre a convergência em cada coordenada, ou seja:

$$x^k = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{k+5}{3}\right)^n} = 0, & \text{se } k \equiv 1 \pmod 3; \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{k+1}{3}}}{\left(\frac{(k+1)(n+1)}{3}\right)^{\frac{k+1}{3}}} = \left(\frac{3}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{3}}, & \text{se } k \equiv 2 \pmod 3; \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{kn}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{kn}\right) = \pi, & \text{se } k \equiv 0 \pmod 3; \end{cases}$$

Assim, para mostrar que a sequência de Cauchy $(x_n)_{n\geq 0}$, basta verificar que as sequências formadas por cada coordenada convergem.

Observação 4. Pode-se mostrar que ℓ_∞ é isométrico a $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$, onde $\beta\mathbb{N}$ é a compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{N}$. Também, $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$ é isométrico a $\mathcal{C}(\{1, \dots, n\})$.

Existem espaços normados que não são de Banach, como mostrado no exemplo abaixo:

Exemplo 24. Seja $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ com a norma definida por

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Apresentaremos a seguir uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ que não converge.

Considere a sequência $(x_n)_{n\geq 2}$, dada por

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right); \\ nt - \frac{n}{2}, & \text{se } t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right); \\ 1, & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right); \end{cases}$$

(x_n) é de Cauchy, pois dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, de modo que se $n > m > n_0$, então $d(x_m, x_n) = \frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}{2} < \varepsilon$.

Vamos mostrar que (x_n) não converge.

Para todo $x \in \mathcal{C}[0,1]$, temos que

$$d(x_n, x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t) - x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |x_n(t) - x(t)|dt =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - x(t)|dt$$

Cada termo é positivo, e então se $d(x_n, x) \to 0$, cada integral deve convergir para 0.

Como x é contínua, devemos ter $x(t) = 0$ se $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ e $x(t) = 1$ se $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, o que é impossível.

Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para nenhuma função em $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Exemplo 25. Seja c_{00} o conjunto das sequências de escalares nulos exceto em uma quantidade finita de termos:

$$c_{00} = \{(x_i)_{i\geq 0} | \text{supp}\{(x_i)\} < \infty\}$$

Considere a norma

$$\|x\|_\infty = \max\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$$

O espaço normado $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ não é completo. De fato, tome a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$, dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots) \\ x_2 &= \left(1, \tfrac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \ldots\right) \\ x_3 &= \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 0, 0, 0, \ldots\right) \\ x_4 &= \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, 0, 0, \ldots\right) \\ &\vdots \\ x_n &= \left(1, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{n-1}, \tfrac{1}{n}, 0, 0 \ldots\right) \end{aligned}$$

$(x_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Assim, $\forall m, n \geq n_0$, temos que

$$\|x_m - x_n\|_\infty \leq \sup\left\{\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{m}\right\} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Mas esta sequência de Cauchy não converge em c_{00}. Esta sequência converge para

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right),$$

que possui todos seus termos não nulos. Logo, $x \notin c_{00}$.

Em particular, $\overline{c_{00}} = c_0$, onde

$$c_0 = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} | \lim_{i\to\infty} x_i = 0\}$$

O exemplo acima mostra que nem todo subespaço de um espaço de Banach é também de Banach, pois $c_{00} \subseteq \ell_\infty$, mas c_{00} não é completo.[1] Dado tal contexto, é interessante investigar em qual situação tal fato acontece. Desse estudo, decorre a

Proposição 49. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado e $A \subset X$ um subespaço. Então:

(i) Se A é de Banach, então A é fechado.

(ii) Se X é de Banach, então A é de Banach se e somente se A é fechado.

Demonstração. (i) Se A é de Banach, vamos mostrar que $A = \overline{A}$, o que comprovará que A é fechado. Tome $x \in \overline{A}$. Por definição, $(x_n)_{n\geq 0} \in A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como $(x_n)_{n\geq 0}$ é convergente, então também é de Cauchy, pois A é de Banach. Como $(x_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência de Cauchy em A, deve convergir para um elemento de A. Logo, $x \in A$, e A é fechado.

(ii) ($\Rightarrow$) Se A é de Banach, então A é fechado pelo item 1.

($\Leftarrow$) Vamos pegar uma sequência de Cauchy em A e mostrar que o fato de X ser de Banach implica no limite dessa sequência também estar em A. Seja X um espaço de Banach e A fechado. Seja $(x_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de Cauchy em A. Claramente, $(x_n)_{n\geq 0}$ é de Cauchy em X também.

Como X é de Banach, $\exists x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Sendo A fechado, então $x \in A$. Logo, toda sequência de Cauchy em A converge para um elemento de A, e portanto A é de Banach.

□

5.1 Espaços ℓ_p

5.1.1 Definições básicas

Definição 68. Seja $p \in [1, \infty[$. O espaço das sequências de escalares p-somáveis é denotado por

$$\ell_p = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in K \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

[1]Na verdade, temos que $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0 \subset \ell_\infty$.

Proposição 50. $(\ell_p, \|.\|_p)$ é um espaço normado para $\|.\|_p$ dada, para todo $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposição 51. Seja $1 \leq p_0 < \infty$, e $x \in \ell_{p_0}$. Então, $x \in \ell_p$ $\forall p > p_0$.

Além disso,

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

5.1.2 Exemplo

A figura 5.1 ilustra um exemplo.

Figura 5.1: Exemplo de LP.

Teorema 3. A figura 5.1 representa um LP.

Demonstração. Trivial. □

Para prosseguir os estudos sobre propriedades dos espaços ℓ_p, precisaremos utilizar algumas desigualdades famosas.

5.1.3 Desigualdades

Proposição 52. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ não-negativos e $p \geq 1$. Então

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$$

Demonstração. Se $a \leq b$, então

$$(a+b)^p \leq (2b)^p = 2^p b^p \leq 2^p(a^p + b^p)$$

Analogamente, prova-se o mesmo para $b \leq a$. □

Teorema 4 (Desigualdade de Young)**.** Sejam $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para a, b números reais não-negativos, vale que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demonstração. Se $ab = 0$, então o resultado é trivial. Podemos supor então que $a, b > 0$. Se $a^p = b^q$, então

$$ab = a(b^q)^{1/q} = aa^{p/q} = a^{p/p}a^{p/q} = a^{p(1/p+1/q)} = a^p = a^p \cdot 1 = a^p \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

Para o caso $a^p \neq b^q$, note que a função $f(x) = \exp\{x\}$ é estritamente convexa, pois $f''(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Então, para todo $t \in [0, 1]$, e todos números reais x, y com $x \neq y$,,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Tomando $t = \frac{1}{p}$, $1 - t = \frac{1}{q}$, $x = \ln a^p$ e $y = \ln b^p$, temos que

$$ab = \exp(\ln ab) = \exp\Big(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\Big) < \frac{\exp(\ln a^p)}{p} + \frac{\exp(\ln b^q)}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Teorema 5 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Considere sequências

$$a_1, a_2, \ldots a_n \quad \text{e} \quad b_{1,2}, \ldots b_n \in K.$$

Então, é válido que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração. Pela Desigualdade de Young 4, sabemos que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Considere

$$A_k = \frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{e} \quad B_k = \frac{|b_k|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

temos que

$$A_kB_k \leq \frac{|a_k|^p}{p\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p} + \frac{|b_k|^q}{q\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q} \Rightarrow A_kB_k \leq \frac{|a_k|^p}{p\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)} + \frac{|b_k|^q}{q\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)}$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n} A_kB_k \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} A_kB_k \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|b_k|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_kb_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

como desejado. □

Observação 5. Quando $p = q = 2$, a desigualdade se reduz à Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Teorema 6 (Desigualdade de Minkowski)**.** Seja $p \in [1, \infty[, n \in \mathbb{N}$. Então, para todos

$$a_1, a_2, \ldots a_n \quad \text{e} \quad b_1, b_2, \ldots b_n \in K,$$

temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração. Sejam $p, q > 1$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Isso implica que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{p+q}{pq} = 1 \Rightarrow p + q = pq \Rightarrow (p-1)q = p$$

Temos que:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^{p-1} \cdot |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^{p-1}|b_k|$$

Pela Desigualdade de Hölder 5:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^{p-1}|b_k| \leq$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p}{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}}\leq\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}}\leq\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

□

Corolário 3. Sejam $x, y \in \ell_p$. Então $x + y \in \ell_p$.

Demonstração. Sejam $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Então, pela desigualdade de Minkowski 6,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\Rightarrow\|x+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p<\infty\Rightarrow$$

$$\|x+y\|_p<\infty\Rightarrow x+y\in\ell_p.$$

□

5.1.4 Propriedades

Definição 69. Seja $p \in [1, \infty[$. Denotamos por ℓ_p^n o espaço n-dimensional K^n munido da norma dada por

$$\|p\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$.

Este espaço é normado pela desigualdade de Minkowski.

Exemplo 26. Abaixo, temos uma figura que representa a bola $B(0;1)$ em ℓ_1^2, ℓ_2^2 e ℓ_1^∞.

Definição 70. Denotamos por c o espaço das sequências de escalares convergentes com a norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

Denotamos por c_0 o espaço das sequências de escalares convergentes a 0, e por c_{00} o espaço das sequências de escalares que possuem uma quantidade finita de termos não-nulos.

Proposição 53. Seja $1 \leq p < \infty$. Então, ℓ_p é um espaço de Banach.

Demonstração. Vamos proceder analogamente ao feito em 23. Seja $(x^k)_{k\geq 0}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_p. Dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall k, \ell > n_0$

$$|x_i^k - x_i^\ell| \leq \left\|x^k - x^\ell\right\|_p < \varepsilon,$$

onde $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots)$. Logo, fixado i, a sequência $(x_i^k)_{k\geq 0}$ é de Cauchy em K.

Seja $x_i = \lim\limits_{k\to\infty} i^k$ e consideremos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Vamos mostrar que $x \in \ell_p$ e que $x^k \to x$ em ℓ_p.

Note que, como toda sequência de Cauchy é limitada, seja $c > 0$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x_i\|_p < c$$

Então, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c$$

Assim, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, ou seja, $x \in \ell_p$.

Dado um $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k, \ell \geq n_0$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i^\ell|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

A continuidade do valor absoluto nos escalares nos garante que

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i^\ell|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \Rightarrow \|x_k - x\|_p < \varepsilon$$

Poranto, concluímos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq n_0$, $\|x_k - x\|_p < \varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$ em ℓ_p.

$\square$

Proposição 54. c e c_0, ambos espaços normados equipados com a norma $\|x\| = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$, são espaços de Banach.

Demonstração. Para demonstrar esse resultado, vamos utilizar 49 e provar que c e c_0 são subespaços fechados de ℓ_∞. Como ℓ_∞ é de Banach, então c e c_0 também serão. Para mostrar que c é fechado, precisamos comprovar que $c = \overline{c}$, ou seja, mostrar que toda sequência de c converge para um elemento de c. Seja $(x^k)_{k\geq 0}$ uma sequência em c tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$ em ℓ_∞.

Escrevendo $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots)$, seja $L_k = \lim\limits_{i\to\infty} x_i^k, k \in \mathbb{N}$. Vejamos que a sequência $(L_k)_{k\geq 0}$ é convergente. Para isto, provaremos que $(L_k)_{k\geq 0}$ é uma sequência de Cauchy em K.

Como $(x^k)_{k\geq 0}$ está em c, e em particular em ℓ_∞, esta é de Cauchy em ℓ_∞, e assim

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \forall k, \ell > n_0, \left\|x^k - x^\ell\right\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow |x_i^k - x_i^\ell| < \varepsilon$$

Fixando k e ℓ, temos que

$$\lim_{i\to\infty} |x_i^k - x_i^\ell| = |L_k - L_\ell| < \varepsilon$$

Assim, $(L_k)_{k\geq 0}$ é de Cauchy, e portanto convergente.

Seja $L = \lim\limits_{k\to\infty} L_k$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} = x$ em ℓ_∞, onde $x = (x_1, x_2, \ldots)$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i$$

Como $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = L$, $x \in c$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|x^k - x\right\|_\infty < \varepsilon$ e $|L_k - L| < \varepsilon\ \forall k \geq n_0$.

Fixando i_0 tal que $|x_i^{n_0} - L_{n_0}|, \forall i \geq i_0$, para $i \geq i_0$, temos que

$$|x_i - L| \leq |x_i^{n_0} - x_i + x_i - L_{n_0} + L_{n_0} - L| = |x_i^{n_0} - x_i| + |x_i - L_{n_0}| + |L_{n_0} - L| < \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = L$. Logo, $x \in c$. Analogamente, mostra-se que c_0 é fechado em ℓ_∞. $\square$

Observação 6. Pode-se também demonstrar diretamente que é completo, sem usar os resultados vistos anteriormente.

Proposição 55. Sejam $1 \leq p < q < \infty$. Então

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0.$$

Demonstração. Seja $N > 0$ tal que $(x_n) \in \ell^p$ possui $|x_n| < 1$ para todo $n > N$.

Isso ocorre se e somente se, para $\infty > q \geq p \geq 1$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^q \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

Então $\ell^p \subseteq \ell^q$ quando $q \geq p$. $\square$

Proposição 56. ℓ_p é um espaço de dimensão infinita.

Demonstração. Basta notar que o conjunto infinito

$$\{e_i\} = \{(1,0,0,0,\ldots),(0,1,0,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots),(0,0,0,1,\ldots)\}$$

gera ℓ_p e é um conjunto LI. $\square$

5.2 Espaços de Banach separáveis

Definição 71. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado e $A \subseteq X$. Dizemos que A é *denso* em X se $\overline{A} = X$.

Observação 7. Todo elemento em X é limite de uma sequência de elementos de A, ou seja

$$A \text{ é denso em } X \iff \forall x \in X \exists (x_n) \in A : x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Definição 72. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado. Dizemos que X é *separável* se ele contém um subconjunto denso e enumerável em X.

Exemplo 27. Para $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ é separável, pois $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e denso em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 28. $\mathbb{C}^n$ é separável, pois $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é enumerável e denso em $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 29. $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([0,1],\mathbb{R})$, o conjunto de polinômios em $[0,1]$ com coeficientes reais é separável, pois $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R})$, o conjunto de polinômios em $[0,1]$ com coeficientes racionais é enumerável e denso em $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([0,1],\mathbb{R})$.

Exemplo 30. $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ é separável, pois $D = \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R})$ é um conjunto denso e enumerável em X. De fato, D é claramente enumerável. Para mostrar o resultado, vamos relembrar o Teorema de Stone-Weierstrass:

Teorema 7 (Stone-Weierstrass)**.** Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe um polinômio $P(x)$ tal que:

$$|P(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a,b].$$

Tome P tal que $\|f - P\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja então

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\partial(P)} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}.$$

Sejam $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots \in \mathbb{Q}$ tais que

$$|a_k - b_k| < \frac{\varepsilon}{2(1+\partial(P))}$$

Defina $\rho_f = \sum_{k=0}^{\partial(\rho)} b_k x^k$. Então:

$$\left\|P - \rho_f\right\|_\infty = \sup\{|P(t) - \rho_f(t)| : t \in [0,1]\} = \sup\left\{\sum_{k=0}^{\max\{\partial(P),\partial(\rho_f)\}} (a_k - b_k)t^k\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, $\left\|f - \rho_f\right\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty + \left\|P - \rho_f\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ Logo, D é denso em X.

Proposição 57. O espaço ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$, é separável.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina M_n como o conjunto de todas as sequências da forma $(\alpha_1, \alpha 2, \ldots, \alpha_n, 0, 0 \ldots)$ em que $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Observe que M_n é enumerável. Definimos agora $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ que é enumerável pois é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Vamos mostrar que $\overline{M} = \ell_p$. Com efeito, considere $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Daí, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\alpha_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

visto que $\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\alpha_j|^p$ converge.

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para cada α_j existe $\beta_j \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|\alpha_j - \beta_j| < \frac{\varepsilon}{(2n_0)^{\frac{1}{p}}}.$$

Dessa forma, podemos obter um $y \in M$, com $y = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n_0}, 0, 0, 0, \ldots)$ tal que $\sum_{j=1}^{n_0} |\alpha_j - \beta_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$. Segue que

$$d(x,y)^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j - \beta_j|^p = \sum_{j=1}^{n_0} |\alpha_j + \beta_j|^p + \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\alpha_j|^p = \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$$

Assim, M é denso em ℓ_p, e portanto ℓ_p é separável. □

Proposição 58. ℓ_∞ não é separável.

Demonstração. Vamos provar algo mais geral: mostraremos que, para X infinito, $B(X)$ não é separável.

Para isso, mostraremos que todo subconjunto de $B(X)$ que é denso em $B(X)$ é não-enumerável. Tome para cada $Y \subseteq X$ a função

$$\begin{array}{rcccl} f_Y & : & X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & x & \longmapsto & f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in Y \\ 0 & \text{se } x \notin Y \end{cases} \end{array}.$$

Seja A o conjunto de todas as funções dessa forma. A quantidade de funções definidas assim é não-enumerável pois está em bijeção com $\mathcal{P}(X)$ e como X é infinito, segue que $\mathcal{P}(X)$ é não-enumerável. Observe que dados $Y_1, Y_2 \subseteq X$ subconjuntos distintos, temos $f_{Y_1} \neq f_{Y_2}$, e assim $d(f_{Y_1}, f_{Y_2}) = 1$ devido à métrica de $B(X)$. Agora, para cada $f \in A$, defina

$$B_f = B\left(f, \frac{1}{2}\right)$$

Observe que essas bolas não se intersectam e que existe uma quantidade não enumerável delas. Dessa forma, se $M \subseteq B(X)$ é denso em $B(X)$, então há pelo menos um ponto de M em cada uma dessas bolas e assim M é não enumerável, como queríamos. Segue que $B(X)$ não é separável. Considerando $X = \mathbb{N}$, segue que ℓ_∞ não é separável. $\square$

Observação 8. Pode-se provar que $\mathcal{C}(K)$ é separável se, e somente se, K é compacto e metrizável. Em particular, $\beta\mathbb{N}$, a compactificação de Stone-Čech dos naturais, não é metrizável, o que mostra que ℓ_∞ não é separável.

Proposição 59. Um espaço de Banach X é separável se e somente se S_X é separável.

Demonstração. Se X é separável, então existe um conjunto D enumerável e denso em X. Para cada $d \in D$, considere

$$D_{S_X} = \{\frac{d}{\|d\|} | d \in D\}$$

Claramente D_{S_X} é enumerável. Vamos mostrar que é denso em S_X.

Se S_X é separável, então contém um subconjunto enumerável e denso $A \subseteq S_X$, e $\overline{A} = S$. Defina o conjunto

$$Q = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} qA$$

onde $qA = \{qa : a \in A\}$. Q é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Vamos mostrar que $\overline{Q} = X$. Podemos assumir $x \neq 0$, pois $0 \in Q$. Então

$$\frac{x}{\|x\|} \in S$$

Como $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, existe uma sequência $q_n \in \mathbb{Q}$, tal que $q_n \to \|x\|$. Como $\overline{A} = S$, existe uma sequência $a_n \in A$ tal que $a_n \to \frac{x}{\|x\|}$. Assim,

$$q_n a_n \in q_n A \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} qA = Q$$

Além disso,

$$\lim_{n \to \infty} q_n a_n = \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} = x$$

portanto $x \in \overline{Q}$, pois é o limite de uma sequência de elementos de Q. Assim, X é separável. $\square$

5.3 Bases

5.3.1 Base de Hamel

Definição 73. Seja X um espaço vetorial. Uma *base de Hamel* de X é uma família LI $\mathcal{B} = \{x_i : i \in I\}$ tal que $[\mathcal{B}] = X$, ou seja, $\mathcal{B}$ gera X.

Em outras palavras, podemos dizer que $\mathcal{B} \subset X$ é uma base de Hamel quando $\mathcal{B}$ for um conjunto linearmente independente maximal, ou seja, se u é um vetor em X tal que $B \cup \{u\}$ é um conjunto LI, então $u \in \mathcal{B}$, ou seja, $\mathcal{B}$ é uma base de Hamel quando não for subconjunto próprio de nenhum outro conjunto LI em X.

Teorema 8. Todo espaço vetorial possui uma base de Hamel.

Demonstração. Para demonstrar este resultado, precisaremos usar o Lema de Zorn 1. Seja X um espaço vetorial. Se X for gerado por um único vetor não-nulo $u \in X$, então o conjunto $\mathscr{B} = \{u\}$ é uma base para X. Assim, podemos supor que existem ao menos dois vetores não-nulos $u, v \in X$ que são LI. Considere o conjunto $\mathcal{U} = \{u, v\}$. Vamos provar que X possui uma base $\mathcal{B}$ que contém $\mathcal{U}$. Para isso, seja $\mathscr{C}$ o conjunto de todas os subconjuntos linearmente independentes $\mathcal{C}$ de X tais que $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$, ou seja:

$$\mathscr{C} = \{\mathcal{C} \subset X | \mathcal{U} \subset \mathcal{C}\}$$

Note que $\mathscr{C}$ é não-vazio, pois $\mathcal{U} \in \mathscr{C}$. . Vamos definir uma ordem parcial em $\mathscr{C}$: Dados $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$, dizemos que $C_1 \leq C_2$ se tivermos $C_1 \subset C_2$. Logo, $(\mathscr{C}, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Pelo Lema de Zorn 1, $\mathscr{C}$ possui um elemento maximal que o indicaremos por $\mathcal{B}$. Portanto, $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente maximal, ou seja, uma base para X contendo $\mathcal{U}$. Logo, todo espaço vetorial possui uma base $\mathcal{B}$. □

Definição 74. A *dimensão* de um espaço vetorial é a menor cardinalidade de uma base de Hamel de X.

Teorema 9. Se X é um espaço vetorial de dimensão finita, todas as normas em X são equivalentes.

Demonstração. Sejam $(X, \|.\|)$ um espaço normado e $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ uma base de Hamel. Podemos supor sem perda de generalidade que $\|e_i\| = 1$, pois caso contrário, basta normalizar a base. Mostremos que $\|.\|$ é equivalente à norma $\|.\|_\alpha$, onde

$$\|x\|_\alpha = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|, \quad \text{para } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Primeiramente, temos que $\|.\|_\alpha$ é uma norma em X. De fato:

- $\|x\|_\alpha \geq 0$, e $\|x\|_\alpha = 0$ se e somente se $x = 0$;

- $\forall k \in K, \|kx\|_\alpha = \left\| \left(\sum\limits_{i=1}^{n} k\lambda_i e_i \right) \right\|_\alpha = \left\| k \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) \right\|_\alpha = |k| \|x\|_\alpha$
- Para todos $x, yz \in X$ com $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ e $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$, $\|x+y\|_\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i + \gamma_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |\gamma_i| = \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$.

Vamos mostrar que existem $\beta_1 \beta_2 > 0$, tais que

$$\beta_1 \|x\| \leq \|x\|_\alpha \leq \beta_2 \|x\|$$

Para todo $x = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i e_i|$, temos que

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i e_i| \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| 1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \|x\|_\alpha \Rightarrow \boxed{\|x\| \leq \|x\|_\alpha}$$

Para mostrar a outra desigualdade, consideremos o conjunto

$$K = \left\{ (a_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1 \right\}$$

Claramente K é limitado, Assim, K é compacto em $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$.
As normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ são equivalentes, pois

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{2} \|x\|_2$$

Desse modo, K também é compacto em $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$.

Considere o espaço métrico (K, d), com $d(x,y) = \|x-y\|_1, \forall x, y \in K$. Tomemos a função

$$\begin{array}{rccc} g & : & K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (\lambda_i)_{i=1}^{n} & \longmapsto & \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| \end{array}$$

Note que g é contínua, pois é 1- lipschitziana. De fato:

$$\left| g(\lambda) - g(\gamma) \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i \right\| \left\| \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \gamma_i| = \|\lambda - \gamma\|_1$$

Além disso, g não se anula, pois $0 \notin K$. Como g é contínua num compacto, esta possui um mínimo, e esse minimo é positivo. Logo, $\exists c > 0$ tal que

$$g(\lambda) \geq c \quad \forall \lambda \in K,$$

isto é, $\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right\| \geq c$ se $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$. Seja $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in S$. Temos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|} e_i\right\| \geq c, \text{pois } \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|}\right) = 1$$

Isso implica

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| = c\|x\|_\alpha.$$

Logo, tomando $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = c$, temos que

$$\beta_1\|x\| \leq \|x\|_\alpha \leq \beta_2\|x\|$$

e portanto as normas $\|.\|$ e $\|.\|_\alpha$ são equivalentes. □

O conceito de base que tratamos geralmente no estudo dos espaços de Banach é o de base de Schauder, que é diferente do conceito de base de Hamel apresentado. Um dos motivos para geralmente não se trabalhar com bases algébricas (de Hamel) em espaços de Banach de dimensão infinita está justificado no resultado a seguir:

Proposição 60. Todo espaço de Banach de dimensão infinita possui uma base de Hamel não enumerável.

Demonstração. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita, e suponhamos por absurdo que exista uma base de Hamel enumerável $\mathcal{B} = \{b_j \in X | j \in \mathbb{N}\}$ de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $F_n = [b_1, \ldots, b_n]$, ou seja, o espaço vetorial gerado por $b_1, \ldots b_n$. Assim,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

e cada F_n é um subespaço próprio de X e fechado, pois tem dimensão finita. Logo, cada F_n tem interior vazio, mas isso contradiz o Teorema de Baire 2. Assim, não existe uma base de Hamel enumerável em espaços de Banach de dimensão infinita. □

5.3.2 Base de Schauder

Séries infinitas

Definição 75. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado, e considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Dizemos que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

é a *sequência de somas parciais* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 76. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado, e considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, com sua respectiva sequência de somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente a $s \in X$, dizemos que a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ é *convergente*, e $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ é a soma da série.

Definição 77. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado, e $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ uma série em X. Então $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ é dita *absolutamente convergente* se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ é convergente.

Nos números reais, sabemos que toda série absolutamente convergente também é convergente. Num contexto mais geral, isto pode não ocorrer.

Exemplo 31. Considere $X = c_{00}$, assim como dada no exemplo 25, com a norma $\|x\|_\infty$. Seja a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots\right)$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 0, \ldots, 0, 0, \ldots\right)$$

$$x_3 = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots, 0, 0, \ldots\right)$$

$$x_n = \left(\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} + 1}, \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} + 2}, \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} + 3}, \ldots, \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)}, \ldots 0, 0, \ldots\right)$$

Vamos verificar que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n)$ não converge em c_{00}. Note que, na primeira coordenada de cada sequência, temos a sequência $x_n^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$. A série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^1$ é convergente, e

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2} + 1}\right) = \frac{2\pi \tanh\left(\frac{\sqrt{7}\pi}{2}\right)}{\sqrt{7}} - 1$$

Da mesma forma, na segunda coordenada de cada sequência, temos a sequência $x_n^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$. A série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ é convergente, e

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2} + 2}\right) = \frac{2\pi \tanh\left(\frac{\sqrt{15}\pi}{2}\right)}{\sqrt{15}} - \frac{1}{2}$$

Na terceira coordenada de cada sequência, temos a sequência $x_n^3 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \ldots\right)$. A série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^3$ é convergente, e

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}+3}\right) = \frac{2\pi \tanh\left(\frac{\sqrt{23}\pi}{2}\right)}{\sqrt{23}} - \frac{1}{3}$$

Fazendo o mesmo para as sequências formadas pelas demais coordenadas, vamos notar que, em geral, a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^m$ converge e

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^m = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}+m}\right) = \frac{2\pi \tanh\left(\frac{\sqrt{8m-1}\pi}{2}\right)}{\sqrt{8m-1}} - \frac{1}{m}$$

Desse modo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$ deveria convergir em c_{00}, à série $(s_m)_{m\in\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$ dada por:

$$\left(\frac{2\pi \tanh\left(\frac{\sqrt{7}\pi}{2}\right)}{\sqrt{7}} - 1, \frac{2\pi \tanh\left(\frac{\sqrt{15}\pi}{2}\right)}{\sqrt{15}} - \frac{1}{2}, \frac{2\pi \tanh\left(\frac{\sqrt{23}\pi}{2}\right)}{\sqrt{23}} - \frac{1}{3}, \ldots\right)$$

Mas observe que todos os termos da série $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ são não-nulos. Assim, $(s_m)_{m\in\mathbb{N}} \notin c_{00}$, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$ não converge em c_{00}.

Vamos considerar a agora a sequência das normas de x_n :

$$\|x_1\|_\infty = \sup\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\|x_2\|_\infty = \sup = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 0, \ldots\right\} = \frac{1}{4}$$

$$\|x_2\|_\infty = \sup = \left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots, \right\} = \frac{1}{7}$$

$$\|x_n\|_\infty = \sup = \left\{\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+1}, \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+2}, \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+3}, \ldots, \right\} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+1}$$

Assim, $(\|x_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, e como já visto, esta série converge, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+1}\right) = \frac{2\pi \tanh\left(\frac{\sqrt{7}\pi}{2}\right)}{\sqrt{7}} - 1$$

Logo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_\infty$ converge. Desse modo, a série $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente em c_{00}, mas é absolutamente convergente. Note que $(c_{00}, \|\centerdot\|_\infty)$ não é um espaço de Banach.

Como o exemplo acima mostrou, existem espaços nos quais nem toda sequência absolutamente convergente é convergente. Mas é possível verificar que isso é válido para espaços de Banach, e fornece uma caracterização para estes:

Teorema 10. Seja $(X, \|\centerdot\|)$ um espaço vetorial normado. Então, X é de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é também convergente em X.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja X um espaço de Banach. Tome $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ uma série absolutamente convergente, ou seja, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ é convergente.

Dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > p > n_0$,

$$\sum_{i=p+1}^{n} \|x_i\| < \varepsilon$$

Analisando as somas parciais da série, temos que

$$\|s_n - s_p\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{p} x_i \right\| = \left\| \sum_{i=p+1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=p+1}^{n} \|x_i\| < \varepsilon$$

Logo, a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X. Assim, como X é de Banach, toda sequência de Cauchy converge, e $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ é convergente.

$(\Leftarrow)$ Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Logo, existe $n_1 > 0$ tal que para todo $n, m > n_1$, temos $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2}$. Seja $n_2 > n_1$ tal que $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{4}$, e seguindo de forma análoga, considere $n_j > n_{j-1}$ tal que para todo $n, m > n_j$,

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^j}.$$

Consideremos a sequência $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, definida recursivamente por

$$\begin{cases} y_0 = x_{n_1} \\ y_j = x_{n_{j+1}} - x_{n_j}, \text{se } j \geq 1 \end{cases}$$

Observemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|y_j\| \leq \|y_0\| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \|y_0\| + 1 < \infty$$

Logo, $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ é absolutamente convergente, e por hipótese, é também convergente. Sendo uma série convergente, a sequência de suas somas parciais deve ser convergente. Mas veja que temos uma soma telescópica:

$$\begin{aligned}
s_k &= \sum_{j=0}^{k} y_j \\
&= y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} + y_k \\
&= x_{n_1} + x_{n_2} - x_{n_1} + x_{n_3} - x_{n_2} + \ldots + x_{n_k} - x_{n_{k-1}} + x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \\
&= \cancel{x_{n_1}} + \cancel{x_{n_2}} - \cancel{x_{n_1}} + \cancel{x_{n_3}} - \cancel{x_{n_2}} + \ldots + \cancel{x_{n_k}} - \cancel{x_{n_{k-1}}} + x_{n_{k+1}} - \cancel{x_{n_k}} \\
&= x_{n_{k+1}} \\
\Rightarrow \quad s_k &= x_{n_{k+1}}
\end{aligned}$$

Daí, como $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente, conclui-se que $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ também é convergente. Sabemos que, se uma subsequência de uma sequência de Cauchy é convergente, então a sequência toda é convergente. Em nosso caso, temos que $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência da sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Logo, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Logo, toda sequência de Cauchy em X converge, e o espaço é completo. Portanto, X é de Banach, como queríamos demonstrar. □

Podemos quesitonar se, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, existe uma série convergente que não é absolutamente convergente. Será que convergência implicar em convergência absoluta é uma exclusividade dos espaços de dimensão finita.

A resposta é positiva, e dada pelo

Teorema 11 (Teorema de Dvoretzky - Rogers)**.** Toda série convergente em um espaço de Banach X é absolutamente convergente se, e somente se, X tem dimensão finita.

Definição e propriedades básicas

Definição 78. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Uma sequência $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X é chamada de *Base de Schauder* de X se todo $x \in X$ pode ser escrito de maneira única como

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i,$$

onde $\lambda_i \in K$.

Exemplo 32. ℓ_p, para $1 \leq p < \infty$, possui a Base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Lembramos aqui que

$$e_i = (0, 0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{posição } i}, 0 \ldots)$$

Para verificar que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fato é uma Base de Schauder para ℓ_p, precisamos primeiramente verificar que todo $x \in \ell_p$ pode ser escrito como combinação linear de elementos de (e_i). Então, para $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_i e_i \right\| = \left\| (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) - (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, 0, 0, \ldots) \right\| =$$

$$\left\| (0, 0, \ldots, 0, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \right\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Assim, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

Agora, vamos verificar a unicidade. Se $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_i$, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \gamma_i) e_i = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i) e_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i) e_i \right\|_p = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \gamma_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Rightarrow \lambda_i = \gamma_i.$$

Portanto $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de é uma Base de Schauder para ℓ_p.

Analogamente, pode-se mostrar que c_0 possui $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como Base de Schauder.

Exemplo 33. O espaço $\mathcal{C}([0,1])$ das funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$ possui base de Schauder. Considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas definidas por $x_0(t) = 1$, $x_1(t) = t$, e, para $n \geq 2$, considere o inteiro positivo m tal que $2^{m-1} < n \leq 2^m$ e defina:

$$x_n(t) = \begin{cases} 2^m \left(t - \left(\frac{2n-2}{2^m} - 1 \right) \right), & \text{se } \frac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n-1}{2^m-1}; \\ 1 - 2^m \left(t - \left(\frac{2n-1}{2^m} - 1 \right) \right), & \text{se } \frac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos provar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é base de Schauder de $\mathcal{C}([0,1])$. Para $f \in \mathcal{C}([0,1])$, queremos determinar únicos escalares $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n$.

Para isso, defina em $\mathcal{C}([0,1])$ a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$p_0 = f(0)x_0,$$

$$p_1 = p_0 + (f(1) - p_0(1))x_1,$$

$$p_2 = p_1 + \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - p_1\left(\frac{1}{2}\right) \right) x_2,$$

$$p_3 = p_2 + \left(f\left(\frac{1}{4}\right) - p_2\left(\frac{1}{4}\right) \right) x_3,$$

$$p_4 = p_3 + \left(f\left(\frac{3}{4}\right) - p_3\left(\frac{3}{4}\right) \right) x_4,$$

$$p_5 = p_4 + \left(f\left(\frac{1}{8}\right) - p_4\left(\frac{1}{8}\right) \right) x_5,$$

Ou seja, em termos gerais teríamos:

$$p_n = p_{n-1} + a_n x_n$$

em que:

$$a_n = f\left(\frac{2\left(n - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + n\left\lfloor \frac{n}{2^{\lceil \log_2 n \rceil}} \right\rfloor\right) - 1}{2^{\lceil \log_2 n \rceil}} \right) - p_{n-1}\left(\frac{2\left(n - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + n\left\lfloor \frac{n}{2^{\lceil \log_2 n \rceil}} \right\rfloor\right) - 1}{2^{\lceil \log_2 n \rceil}} \right)$$

Para qualquer $t \in [0,1]$, temos que $p_0(t) = f(0)x_0(t) = f_0$ então p_0 coincide com f no ponto 0, e como

$$p_1(t) = p_0(t) + (f(1) - p_0(1))x_1(t) = f(0) + (f(1) - f(0))t$$

então p_1 coincide com f nos pontos 0 e 1 e o seu gráfico é o segmento de reta com extremidades $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$. Analogamente, verifica-se que p_2 coincide com f nos pontos $0, 1$ e $\frac{1}{2}$, e o seu gráfico é a união dos segmentos de retas com extremidades em $(0, f(0))$ e $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ e em $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ e $(1, f(1))$. Continuando com este raciocínio para $n \in \mathbb{N}$, temos que p_n coincide com f nos $n+1$ primeiros pontos do subconjunto

$$D = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\} \subset [0,1]$$

e seu gráfico é a justaposição dos segmentos de reta cujas abscissas das extremidades estão no conjunto D.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja α_m o coeficiente de x_m na equação que define p_m. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $p_n = \sum\limits_{m=0}^{n} \alpha_m x_m$. Como $f \in \mathcal{C}([0,1])$ é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } t_1, t_2 \in [0,1], |t_1 - t_2| < \delta, \text{então } \left|f(t_1) - f(t_2)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Considere $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \frac{\delta}{2}$ e tome $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que f e p_{n_0} coincidem no conjunto

$$D = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{2^m - 1}{2^m}\right\}.$$

Se $t \in [0,1]$, então existe $k \in \{1, \ldots, 2^m - 1\}$tal que $\left|t - \frac{k}{2^m}\right| < \delta$. Logo, se $k \neq 2^m$, segue que

$$\begin{aligned}
\left|f(t) - p_n(t)\right| &= \left|f(t) - f\left(\tfrac{k}{2^m}\right) + f\left(\tfrac{k}{2^m}\right) - p_n(t)\right| \\
&\leq \left|f(t) - f\left(\tfrac{k}{2^m}\right)\right| + \left|f\left(\tfrac{k}{2^m}\right) - p_n(t)\right| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \left|f\left(\tfrac{k}{2^m}\right) - p_n(t)\right| \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} + \left|f\left(\tfrac{k}{2^m}\right) - p_n(t)\right| \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} + \left|p_n\left(\tfrac{k}{2^m}\right) - p_n(t)\right| \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \left|p_n\left(\tfrac{k}{2^m}\right) - p_n(\tfrac{k+1}{2^m})\right| \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} + \left|f\left(\tfrac{k}{2^m}\right) - f(\tfrac{k+1}{2^m})\right| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\left|f(t) - p_n(t)\right| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Se $k = 2^m$, o resultado segue de maneira similar. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_\infty = 0,$$

ou seja, é válida a representação

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n,$$

Precisamos mostrar agora que tal representação é única. Seja uma sequência de escalares $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n x_n$. Como $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n x_n(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n(t)$ $\forall t \in [0,1]$, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) x_n(t) = 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Para $t = 0$, temos

$$\alpha_0 - \beta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) x_n(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \beta_0$$

Com isso, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) x_n(t) = 0$, e para $t = 1$, temos que

$$\alpha_1 - \beta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) x_n(1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$$

Com isso, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) x_n(t) = 0$ e aplicando $t = \frac{1}{2}$ obtemos $\alpha_2 = \beta_2$. Procedendo analogamente com esse raciocínio para os demais valores de $t = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$, obtém-se $\alpha_n = \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a representação é única. Portanto, concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é base de Schauder de $\mathcal{C}([0,1])$.

O exemplo acima mostra como pode ser complicado encontrar uma base de Schauder para determinado espaço. Logo, é razoável estudar em que condições podemos garantir a existência de uma base de Schauder para um espaço de Banach de dimensão infinita.

Proposição 61. Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado. Se existe uma família enumerável $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ tal que $\overline{[x_n, n \in \mathbb{N}]} = X$, então X é separável.

Demonstração. Seja

$$D = \{\sum_{i \in F} a_i x_i : a_i \in \mathbb{Q}, F \subseteq \mathbb{N}\text{finito}\}$$

Claramente D é enumerável. Vamos mostrar que $\overline{D} = X$. Seja $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Considere $F \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{i \in F} \lambda_i x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Supondo $x_n \neq 0$, para cada $n \in F$, seja $a_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|a_n - \lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2\|x_n\||F|}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{i \in F} a_i x_i \right\| &= \left\| x - \sum_{n \in F} \lambda_n x_n + \sum_{n \in F} \lambda_n x_n - \sum_{i \in F} a_i x_i \right\| \\
&\leq \left\| x - \sum_{n \in F} \lambda_n x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in F} \lambda_n x_n - \sum_{i \in F} a_i x_i \right\| \\
&= \left\| x - \sum_{n \in F} \lambda_n x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in F} (\lambda_n - a_n) x_n \right\| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \sum_{n \in F} |\lambda_n - a_n| \|x_n\| \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \sum_{n \in F} \left(\tfrac{\varepsilon}{2\|x_n\||F|} \right) \|x_n\| \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{1}{2} \sum_{n \in F} \left(\tfrac{\varepsilon}{|F|} \right) \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Portanto,D é denso em X. Logo, X é separável. Para $K = \mathbb{C}$, basta considerar $a_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. □

Corolário 4. Todo espaço de Banach com base de Schauder é separável.

Demonstração. Seja X espaço de Banach e $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um base de Schauder de X. Então, $X = \overline{[e_n, n \in \mathbb{N}]}$. Com efeito, dado $x \in X$, com $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i$,

$$x = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in [e_n, n \in \mathbb{N}].$$

Logo, da proposição anterior, X é separável. $\square$

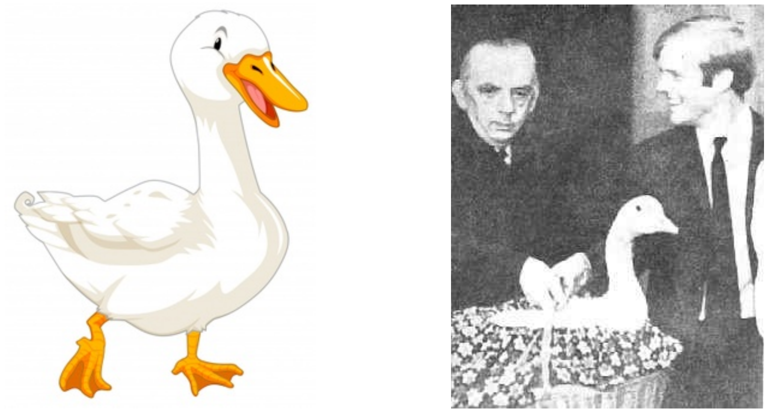
Exemplo 34. c_0 é separável. De fato, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para c_0, e então $\overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]} = c_0$.

Exemplo 35. ℓ_∞ não possui base de Schauder, pois não é separável.

Exemplo 36. Qualquer espaço normado de dimensão finita é separável, pois é gerado por um conjunto finito.

Exemplo 37. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, os polinômios são densos em $\mathcal{C}([0,1])$. Então, $\overline{[t^n, n = 1, 2, \ldots]} = \mathcal{C}([0,1])$, o que mostra que $\mathcal{C}([0,1])$. Já tinhamos visto isso ao provar que $\mathcal{C}([0,1])$ possui uma base de Schauder, mas note que esta forma é bem mais rápida e direta.

A recíproca, ou seja, se todo espaço de Banach separável tem base de Schauder foi um problema em aberto por muitos anos, até ser resolvido em 1973 pelo matemático sueco Per Enflo, quando este publicou uma resposta negativa, e ganhou um ganso vivo por isso. Logo, existem espaços de Banach separáveis sem base de Schauder.



(a) Ganso. (b) Per Enflo recebendo seu "prêmio".

5.4 Completamento de um Espaço normado

Definição 79. Sejam $(X, \|.\|_X)$ e $(Y, \|.\|_Y)$ espaços normados. Uma função $f\colon X \to Y$ é chamada

(i) *imersão isométrica* se

$$\|f(x) - f(y)\|_Y = \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X$$

(ii) *imersão isométrica linear* se for uma imersão isométrica que é linear, ou seja

$$\|f(x)\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

(ii) *isometria linear* se for uma imersão isométrica sobrejetora.

Em essência, uma imersão isométrica é uma função que mantém distâncias.

Teorema 12 (Teorema do Completamento)**.** Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado. Então, existe um espaço de Banach $\hat{X}$ e uma imersão isométrica linear $T\colon X \to \hat{X}$ tal que $\overline{T(X)} = \hat{X}$. Além disso, $\hat{X}$ é único a menosde isometrias lineares.

Ao espaço $(\hat{X}, \|.\|)$ do teorema anterior chamamos *completamento* do espaço $(X, \|.\|)$.

Exemplo 38. Se X é um espaço de Banach, e $A \subseteq X$ é um subespaço, então seu completamento coincide com o fecho, ou seja

$$\hat{A} = \overline{A}$$

Exemplo 39. O completamento de $\mathbb{Q}$ com a métrica usual é $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

Exemplo 40. O completamento de $]0,1[$ com a métrica usual é $[0,1]$ com a métrica usual.

Exemplo 41. O completamento de $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|)_p)$, $1 \leq p < \infty$, denota-se por $L^p[a,b]$. O espaço L^p pode ser identificado com o conjunto das funções

$$x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

mensuráveis à Lebesgue e tais que $|x|^p$p é integrável à Lebesgue, sendo necessário identificar como sendo a mesma função funções iguais quase por toda a parte. A métrica $L^p[a,b]$ é dada por

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde a medida μ considerada é a de Lebesgue.

5.5 Operações sobre Espaços Normados

5.5.1 Somas de Espaços Normados

Definição 80. Sejam $(X, \|.\|_X)$ e $(Y, \|.\|_Y)$ espaços normados. A soma dada por $X \oplus Y$ é o espaço produto $X \times Y$ munido da norma

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

Observação 9. A topologia em $X \oplus Y$ é gerada por qualquer uma das seguintes normas, equivalentes em $X \times Y$:

$$\|(x, y)\|_p = \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

Proposição 62. Se X e Y são espaços de Banach, então $X \oplus Y$ é espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $X \oplus Y$. Então, precisamos mostrar que esta sequência converge. Como $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em X e Y, respectivamente. Logo, estas sequências convergem para certos $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$ e $y \lim_{n\to\infty} y_n \in Y$. Dessa forma:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y) \in X \oplus Y$$

Logo, a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $X \oplus Y$, e portanto $X \oplus Y$ é um espaço de Banach. $\square$

Definição 81. Dado um espaço de Banach, definimos a n-ésima potência de X, indicada por X^n, como

$$X^n = \bigoplus_{i=1}^{n} X = \underbrace{X \oplus X \oplus \ldots \oplus X}_{n \text{ vezes}}$$

5.5.2 Quociente de Espaços Normados

Para definir o quociente entre espaços normados, vamos nos inspirar na definição que já temos para espaços vetorias, pois queremos que este mantenha as propriedades de espaço vetorial. Vamos relembrar brevemente estas definições:

Definição 82. Seja X um espaço vetorial e Y um subespaço de X. O *espaço quociente* X/Y é o espaço das classes de equivalência

$$\overline{x} = x + Y = \{x + y : y \in Y\}$$

X/Y é um espaço vetorial com as operações

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}, \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in X/Y$$

$$\alpha\overline{a} = \overline{\alpha a}, \quad \forall \overline{a} \in X/Y, \forall \alpha \in K$$

Em particular, temos que

$$\overline{x} = \overline{z} \Leftrightarrow x - z \in Y$$

Agora suponha que X seja normado. Estamos interessados em definir uma norma em X/Y. Para isso, queremos encontrar a "menor distância"entre duas classes de equivalência no espaço quociente. Então, podemos denotar

$$\|\overline{x}\| = \inf_{z \in \overline{x}} \|z\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = d(x, Y)$$

Mas observe que o definido acima ainda não é uma norma. Para um subespaço qualquer, se $y \in \overline{Y}$ mas $y \notin Y$, então $d(y, Y) = 0$, mas $y \notin Y$, e $y \neq 0$. Logo, isso irá quebrar um dos axiomas da norma ($\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$). Chama-se tal função de *semi-norma.* Mas note que, se $Y = \overline{Y}$, então este axioma da norma será satisfeito. Assim, para termos uma norma, precisamos considerar Y fechado.

Proposição 63. Sejam $(X, \|.\|)$ um espaço normado e Y um subespaço fechado de X. Então

$$\|\overline{x}\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\|$$

é uma norma para X/Y.

Demonstração. Se $\|x + Y\| = 0$ e Y é fechado, significa que $d(x, Y) = 0$ e portanto $x \in \overline{Y} = Y$. Então $x + Y = Y = 0$.

Considere agora $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Então

$$\|\lambda \overline{x}\| = \big\|\lambda(x + Y)\big\| = \|\lambda x + Y\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + y\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + \lambda y\| =$$

$$\inf_{y \in Y} \big\|\lambda(x + y)\big\| = |y| \inf_{y \in Y} \|x + y\| = |\lambda| \|x + Y\| = |\lambda| \|\overline{x}\|$$

Sejam $\overline{x} = x + Y$ e $\overline{x'} = x' + Y$ elementos de X/Y. Para quaisquer $y_1, y_2 \in Y$, temos que

$$\left\|\overline{x} + \overline{x'}\right\| = \big\|(x + Y) + (x' + Y)\big\| = \big\|(x + x') + Y\big\| = \inf_{y \in Y} \big\|x + x' + y\big\| \leq$$

$$\big\|x + x' + (y_1 + y_2)\big\| \leq \|x + y_1\| + \big\|x' + y_2\big\|$$

Tomando o ínfimo, obtemos $\big\|(x + Y) + (x' + Y)\big\| \leq \|x + Y\| + \big\|x' + Y\big\|$. □

Teorema 13. Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. Então X/Y é um espaço de Banach.

Demonstração. Pela proposição anterior, X/Y é um espaço normado. Temos apenas que mostrar que o espaço é completo. Para isso, vamos usar a caracterização por meio de convergência de séries. Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{x_n}$ uma série absolutamente convergente em X/Y. Pela definição de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in x_n + Y$ com $\|z_n\| < \|x_n + Y\| + 2^{-n}$. Então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente no espaço de Banach X e portanto converge. Seja z seu limite e considere a classe $z + Y = \overline{z}$. Vamos mostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} = \overline{z}$.

$$\left\| \overline{z} - \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} \right\| = \left\| \overline{z - \sum_{k=1}^{n} x_n} \right\| \leq \left\| z - \sum_{k=1}^{n} z_k \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{x_n}$ converge para $\overline{z}$. Mostramos então que toda série absolutamente convergente em X/Y converge, o que equivale dizer que X/Y é espaço de Banach. $\square$

Capítulo 6

Aplicações Lineares

Definição 83. Um funcional linear num $K-$espaço vetorial X é uma transformação linear $\varphi\colon X \to K$.

Proposição 64. Seja X um espaço vetorial e H um subespaço vetorial de X. São equivalentes:

(i) $\operatorname{codim}(X) = \dim(X/H) = 1$

(ii) Existe um funcional linear f em X tal que $H = \ker(f)$.

(iii) Existe um $x_0 \in X$, $x_0 \notin H$ tal que X é soma direta algébrica de H e W, onde $W = \langle x_0 \rangle = Kx_0$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (iii)$ Seja $\overline{x_0} \in X/H, \overline{x_0} \neq \overline{0}$, $x_0 \notin H$ e $H \subset K = \{0\}$. Seja $x \in X$. Existe $\lambda \in K$ tal que $\overline{x} = \lambda \overline{x_0}$. Isso implica que existe $h \in H$ tal que $x - \lambda x_0 = h$. Logo, $x = h + \lambda x_0$, o que implica $X = H \oplus Kx_0$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Seja $X = H \oplus Kx_0$. Então

$$f(h + \lambda x_0) = \lambda$$

é um funcional linear em X tal que $\ker f = H$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $f\colon X \to K$ tal que $\ker f = H$. Tome $x_0 \in X/H$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Seja $x \in X$. Considere $\lambda = \frac{f(x)}{f(x_0)}$. Então

$$f(x - \lambda x_0) = f(x) - \lambda f(x_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)} f(x_0) = f(x) - f(x) = 0$$

Logo, $xx - \lambda x_0 \in H$. Daí, $\overline{x} = \lambda \overline{x_0}$, o que implica $\dim(X/H) = 1$. □

Definição 84. Se uma das condições anteriores são satisfeitas, dizemos que H é um *hiperplano* de X.

Exemplo 42. c_0 é um hiperplano de c. Basta tomar o funcional linear

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & c & \longrightarrow & K \\ & & x & \longmapsto & f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \end{array}$$

Veja que $c_0 = \ker f$. Além disso, c_0 é um hiperplano fechado de c.

Como notação, definiremos:

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

Definição 85. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos. Então, $f\colon M \to N$ é dita

- *Lipschitziana* se $\exists L > 0$ tal que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

- *Uniformemente contínua* se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\ \forall x, y \in X$$

Em espaços métricos, o fato de uma função ser de Lipschitz implica ela ser uniformemente contínua, o que por sua vez implica sua continuidade. A recíproca em geral não vale. Mas veremos que ela é válida para o caso dos operadores lineares.

Teorema 14. Sejam X e Y espaços normados e $T\colon X \to Y$ um operador linear. São equivalentes:

(i) T é Lipschitz;

(ii) T é uniformemente contínua;

(iii) T é contínua;

(iv) T é contínua em algum ponto;

(v) T é contínua em 0;

(vi) $\exists M > 0$ tal que
$$\big\|T(x)\big\| \leq M, \quad \forall x \in B_X$$

(vii) $\exists M > 0$ tal que
$$\big\|T(x)\big\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X$$

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ é claro, pois é válido em qualquer espaço métrico, e não depende da linearidade de T.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Suponha que T é contínua em $x_0 \in X$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \big\|T(x) - T(x_0)\big\| < \varepsilon$$

Seja $\|x\| < \delta$. Então

$$\big\|T(x) - T(0)\big\| = \big\|T(x - 0)\big\| = \big\|T(x)\big\| = \big\|T(x + x_0 - x_0)\big\| = \big\|T(x + x_0) - T(x_0)\big\| < \varepsilon,$$

pois $\big\|(x + x_0) - x_0\big\| = \|x\| < \delta$. Portanto, T é contínua em 0.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Se T é contínua em 0, dado $\varepsilon = 1$, existe um $\delta > 0$ tal que,

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \big\|T(x) - T(0)\big\| < 1$$

Seja $x \in B_X$. Então

$$\left\|\frac{\delta}{2}x\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \left\|T\left(\frac{\delta}{2}\right)\right\| < 1 \Rightarrow \left\|\frac{\delta}{2}T(x)\right\| < 1 \Rightarrow \frac{\delta}{2}\|T(x)\| < 1 \Rightarrow \|T(x)\| < \frac{2}{\delta}$$

Logo, tomando $M = \frac{2}{\delta}$, temos que $\big\|T(x)\big\| \leq M$.

$(vi) \Rightarrow (vii)$ Se $\big\|T(x)\big\| \leq M \ \forall x \in B_X$, então $x \in X$ implica que $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$. Então:

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < M \Rightarrow \left\|\frac{1}{\|x\|}T(x)\right\| < M \Rightarrow \frac{1}{\|x\|}\big\|T(x)\big\| < M \Rightarrow \big\|T(x)\big\| \leq M\|x\|$$

$(vii) \Rightarrow (i)$ Se $\big\|T(x)\big\| \leq M\|x\|$, então

$$\big\|T(x) - T(y)\big\| = \big\|T(x - y)\big\| = M\|x - y\| \Rightarrow \big\|T(x) - T(y)\big\| \leq M\|x - y\|$$

Logo, T é lipschitziana. $\square$

Exemplo 43.

$$\begin{array}{rccc} Id : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} 0 : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

são funcionais lineares contínuos.

Exemplo 44. Qualquer aplicação linear definida em K^p é contínua. a. Vamos demonstrar este fato usando a norma da soma de K^p. Como sabemos, ela é equivalente à norma euclidiana e mais simples de se trabalhar. Seja $T\colon K^p \to Y$ linear. Então

$$\begin{aligned} \|T(x_1,\ldots,x_p)\| &= \|x_1T(e_1)+\ldots+x_pT(e_p)\| \\ &\le |x_1|\|T(e_1)\|+\ldots+|x_p|\|T(e_p)\| \\ &\le \max_{i=1,\ldots,p}\|T(e_i)\|\cdot(|x_1|+\ldots+|x_p|) \\ &= M\|(x_1,\ldots,x_p)\|_1 \end{aligned}$$

onde $M = \max\limits_{i=1,\ldots,p}\|T(e_i)\|$. Logo T é contínua pelo teorema.

Exemplo 45. Seja $1 \le p < \infty$. Fixemos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Defina

$$\begin{array}{rccl} T & : & \ell_\infty & \longrightarrow & \ell_p \\ & & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (a_nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

é linear e bem-definida.

Exemplo 46. Vamos dar exemplo de um operador chamado operador integral. Fixemos $\kappa\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ contínua. Definimos

$$\begin{array}{rccl} T & : & \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1]) \\ & & (T(f))(t) & \longmapsto & \int\limits_0^1 \kappa(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s \end{array}$$

T é linear. De fato, seja $\kappa_0 > 0$ tal que

$$|\kappa(t,s)| \le \kappa_0, \quad \forall (t,s) \in [0,1]\times[0,1].$$

Então

$$\|T(f)\|_\infty = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 \kappa(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |\kappa(t,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s = \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |\kappa_0||f(s)|\,\mathrm{d}s =$$

$$\kappa_0 \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |f(s)|\,\mathrm{d}s = \kappa_0\|f\|_\infty$$

Exemplo 47. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}([0,1])$ dos polinômios reais munidos da norma

$$\|p\| = \sup_{t\in[0,1]}|p(x)|.$$

Então, o operador derivação

$$\begin{array}{rccl} D & : & \mathcal{P}([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{P}([0,1]) \\ & & p & \longmapsto & D(p) = p' \end{array}$$

não é contínuo, pois para cada $n \in \mathbb{N}$ o polinômio t^n está em $B_{\mathcal{P}([0,1])}$, pois

$$\|t^n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1.$$

Mas sua derivada é $D(t^n) = nt^{n-1}$, que tem norma

$$\left\|nt^{n-1}\right\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \left|nt^{n-1}\right| = n.$$

Como n pode ser arbitrariamente grande (por exemplo, se $n > 8000$, a norma de $D(t^n)$ será mais de 8000), segue que é impossível encontrar M que satisfaça $\|D(p)\| \leq M$. Logo, D não é um operador contínuo.

Lembrando que uma aplicação linear entre espaços normados $T\colon X \to Y$ é uma imersão linear se

$$\|T(x)\| = \|x\|, \quad \forall x \in X$$

Proposição 65. Seja $T\colon X \to Y$ uma imersão isométrica linear. Então:

(i) T é contínua;

(ii) T é injetora;

(iii) T é inversível sobre sua imagem $\operatorname{Im}(T)$. Além disso,

$$T^{-1}\colon \operatorname{Im} T \to X$$

também é uma imersão isométrica linear.

Demonstração. Seja $T\colon X \to Y$ uma imersão isométrica linear. Então:

(i) Da definição, temos que:

$$\|T(x)\| < \|x\| = 1 \Rightarrow \|T(x)\| = 1, \quad \forall x \in B_X$$

Então T é contínua.

(ii) Vamos mostrar que $\ker T = \{0\}$. De fato:

$$T(x) = 0 \Rightarrow 0 = \|T(x)\| = \|x\| \Rightarrow x = 0$$

Logo, $\ker(T) = \{0\}$.

(iii) Vamos mostrar que

$$T^{-1}\colon \operatorname{Im} T \to X$$

é uma imersão isométrica linear. Para isso, Seja $y \in \operatorname{Im} T$. Então, $y = T(x)$ para algum $x \in X$. Desse modo,

$$\left\|T^{-1}(y)\right\| = \left\|T^{-1}(T(x))\right\| = \|x\| = \|T(x)\| = \|y\| \Rightarrow \boxed{\left\|T^{-1}(y)\right\| = \|y\|}$$

□

Proposição 66. Sejam X e Y espaços normados e $T\colon X \to Y$ linear e bijetora. São equivalentes:

(i) T é homeomorfismo, ou seja, T e T^{-1} são contínuas;

(ii) T é homeomorfismo uniforme, ou seja, T e T^{-1} são uniformemente contínuas;

(iii) Existem $c, d > 0$ tais que

$$c\|x\|_X \leq \left\|T(x)\right\|_Y \leq d\|x\|_X$$

Demonstração. **(i)** $\Leftrightarrow$ **(ii)** : Segue diretamente da proposição 65 anterior.
(iii) $\Rightarrow$ **(i)** : Se $\left\|T(x)\right\| \leq d\|x\|$ para todo $x \in X$, então

$$\left\|T(x)\right\| \leq d, \quad \forall x \in B_X.$$

Logo, T é contínua. Considere agora $T^{-1}\colon Y \to X$. Seja $y \in Y$. Então, existe um $x \in X$ tal que $y = T(x)$. Assim,

$$\left\|T^{-1}(y)\right\| = \left\|T^{-1}(T(x))\right\| = \|x\| \leq \frac{1}{c}\|T(y)\| = \frac{1}{c}\|y\| \Rightarrow \left\|T^{-1}(y)\right\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$$

Logo, $\left\|T^{-1}\right\| \leq \frac{1}{c}$, para todo $y \in B_Y$. Portanto, T^{-1} é contínua. **(i)** $\Rightarrow$ **(iii)** : Se T é contínua, então existe uma constante $d > 0$ tal que $\left\|T(x)\right\| \leq d\|x\|$. Seja $y \in Y$.Considere $x \in X$ tal que $y = T(x)$. Se T^{-1} é contínua, então existe uma constante $\frac{1}{c} > 0$ tal que $\left\|T^{-1}(y)\right\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$. Daí:

$$\left\|T^{-1}(y)\right\| \leq \frac{1}{c}\|y\| \Rightarrow c\left\|T^{-1}(y)\right\| \leq \|y\| \Rightarrow c\left\|T^{-1}(T(x))\right\| \leq \left\|T(x)\right\| \Rightarrow c\|x\| \leq \left\|T(x)\right\|$$

Portanto, concluímos que

$$c\|x\| \leq \left\|T(x)\right\| \leq d\|x\|$$

□

A proposição acima nos motiva a fazer a seguinte definição:

Definição 86. Se $T\colon X \to Y$ é linear e sobrejetora, e satisfaz uma das três condições equivalentes:

(i) T é homeomorfismo, ou seja, T e T^{-1} são contínuas;

(ii) T é homeomorfismo uniforme, ou seja, T e T^{-1} são uniformemente contínuas;

(iii) Existem $c, d > 0$ tais que

$$c\|x\|_X \leq \left\|T(x)\right\|_Y \leq d\|x\|_X$$

dizemos que T é um *isomorfismo* entre X e Y. Quando existe um isomorfismo entre X e Y, diremos que X e Y são isomorfos, e adotaremos a notação $X \cong Y$.

Proposição 67. Sejam X e Y espaços normados. Se X e Y são isomorfos, e X é completo, então Y também é.

Demonstração. Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n \geq n_0$,

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Como esta sequência é de Cauchy em X, e X é completo, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Como $X \cong Y$, existe um isomorfismo $T\colon X \to Y$. Dada $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em Y, vamos mostrar que esta converge. Para cada y_i, existe um $x_i \in X$ tal que $y_i = T(x_i)$. Temos então que

$$\|y_n - y_m\| = \big\|T(x_n) - T(x_m)\big\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \big\|T(x_n) - T(x_m)\big\| = \big\|T(x_n) - T(x)\big\| < \varepsilon$$

Logo, a sequência $(T(x_i))$ converge para $T(x)$. Tomando $y = T(x)$, concluímos pela continuidade de T que a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y. Portanto, Y é completo. □

Teorema 15. Todos os espaços normados de dimensão n finita são isomorfos entre si.

Demonstração. Sejam X e Y espaços normados de dimensão n. Consideremos $(e_i)_{i=1}^n$ base de X e $(f_i)_{i=1}^n$ base de Y. Seja

$$\begin{array}{rccl} T & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \end{array}$$

Observe que T é linear e sobrejetora. Definamos uma norma em X: $\|x\| = \big\|T(x)\big\|_Y$. De fato, esta é uma norma:

1. Se $\|x\| = 0$, então:
$$\begin{array}{rrcl} & \|x\| & = & 0 \\ \Rightarrow & \big\|T(x)\big\|_Y & = & 0 \\ \Rightarrow & \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right\| & = & 0 \\ \Rightarrow & \lambda_i & = & 0 \end{array}$$

2. Para $\alpha \in K$, temos que
$$\begin{array}{rcl} \|\alpha x\| & = & \big\|T(\alpha x)\big\|_Y \\ & = & \big\|\alpha T(x)\big\|_Y \\ & = & |\alpha|\big\|T(x)\big\|_Y \\ & = & |\alpha|\|x\| \Rightarrow \|\alpha x\| \\ & = & |\alpha|\|x\| \end{array}$$

3. Sejam $x_1, x_2 \in X$, então

$$\begin{array}{rcl} \|x_1 + x_2\| & = & \left\|T(x_1 + x_2)\right\|_Y \\ & = & \left\|T(x_1) + T(x_2)\right\|_Y \\ & \leq & \left\|T(x_1)\right\|_Y + \left\|T(x_2)\right\|_Y \\ & = & \|x_1\| + \|x_2\| \\ \Rightarrow \quad \|x_1 + x_2\| & \leq & \|x_1\| + \|x_2\| \end{array}$$

Como todas as normas em X são equiavalentes, pois é um espaço normado de dimensão finita, temos que existem $c, d > 0$ tais que

$$c\|x\|_X \leq \|x\| \leq d\|x\|_X$$

Dessa forma, temos que

$$c\|x\|_X \leq \|x\| \leq d\|x\|_X \Rightarrow c\|x\|_X \leq \left\|T(x)\right\|_Y \leq d\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

Portanto, T é um isomorfismo, e quaisquer dois espaços normados X e Y de dimensão n são isomorfos. □

Observação 10. Nem todos os espaços isomorfos são isométricos. Considere por exemplo c e c_0. Temos então

$$\begin{array}{rrcl} T & : & c & \longrightarrow & c_0 \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & T(x_n) = (\ell, \ell - x_1, \ell - x_2, \ell - x_3, \ldots) \end{array}$$

onde $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Observe que sua inversa é

$$\begin{array}{rrcl} T^{-1} & : & c_0 & \longrightarrow & c \\ & (y_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & T(y_n) = (y_0, y_0 + y_1, y_0 + y_2, y_0 + y_3, \ldots) \end{array}$$

Portanto, T é um isomorfismo, mas c e c_0 não são isométricos.

Em geral, c e c_0 são isomorfos pois quaisquer dois hiperplanos fechados são isomorfos, e c_0 é um hiperplano fechado de c. Em particular, c é isomorfo a todos os seus hiperplanos fechados.

Observação 11. Existem espaços de Banach que não são isomorfos a seus hiperplanos fechados. Tal problema foi conhecido como Problema dos Hiperplanos de Banach, e foi resolvido por Gowers em 1994, que apresentou um exemplo. Este exemplo foge do escopo deste material, e não será tratado aqui. Contudo, a título de curiosidade, vamos apresentar um espaço que conjectura-se satisfazer essa condição, e que se provado será considerado o espaço de Banach "mais simples"com a condição de não ser isomorfo a seus hiperplanos fechados. Trata-se dos espaços de Kalton-Peck Z_p.

Definição 87. Sejam Y e Z espaços de Banach. Uma *sequência exata* é uma sequência

$$0 \to Y \xrightarrow{j} X \xrightarrow{q} Z \to 0$$

onde $j\colon Y \to X, q\colon X \to Z$ são injetor e sobrejetor, respectivamente, tais que $\ker q = \operatorname{Im} j$.

$j(Y)$ é um subespaço fechado de X e $X/j(Y) \equiv Z$.

Equivalentemente, dados X e Y espaços de Banach, Uma soma torcida de X e Y é um espaço quase-Banach Z que possui um subespaço X_0 isomorfo a X tal que Z/X_0 seja isomorfo a Y.

A sequência exata é dita trivial se $Z = X \times Y$. Uma *soma torcida* de Y e Z é uma sequência exata não-tivial.

Definição 88. Uma *aplicação quasi-linear* de X em Y é uma aplicação $\Omega\colon Y \to X$, com

1. $\Omega(\lambda y) = \lambda\Omega(y),\ \forall y \in Y, \lambda \in K$;
2. $\left\|\Omega(y_1 + y_2) - \Omega(y_1) - \Omega(y_2)\right\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|)$, para todo $y_1, y_2 \in Y$ e para algum $M > 0$.

Uma aplicação quasi-linear $F\colon Z \to Y$ induz uma sequência exata

$$0 \to Y \xrightarrow{j} Y \oplus_F Z \xrightarrow{q} Z \to 0$$

para $j(y) = (y, 0)$ e $q(y, z) = z$. onde

$$Y \oplus_F Z = \{(y, z) \in Y_0 \times Z : y - F(z) \in Y\},$$

munido da quasi-norma

$$\left\|(y, z)\right\|_F = \left\|y - F(y)\right\|_Y + \|z\|_Z$$

Uma quasi-norma é uma função $\|.\|\colon X \to \mathbb{R}$, tal que

1. $\|x\| > 0$, se $x \neq 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $x \in X, \lambda \in K$.
3. $\|x_1 + x_2\| \leq C(\|x_1\| + \|x_2\|)$, para todo $x_1, x_2 \in X$, e uma constante $C \geq 1$ independente de x_1 e x_2.

Seja $c_{00} \subset \ell_2$ o subespaço das sequências de suporte finito. Defina $\tilde{\Omega}_2\colon c_{00} \to \ell_2$, dada por

$$\tilde{\Omega}_2(x) = \sum x_n \log\left(\frac{\|x\|_2}{|x|}\right) e_n$$

para cada $x = \sum x_n e_n \in c_{00}$, onde o somando $x_n \log\left(\frac{\|x\|_2}{|x|}\right) e_n$ será entendido como 0 quando $x_n = 0$.

Pode-se mostrar que $\tilde{\Omega}_2\colon c_{00} \to \ell_2$ é uma aplicação quasi-linear. Sabemos que:

Proposição 68. Sejam X e Y espaços de Banach e Y_0 um subespaço denso de Y. Se $\Omega_0\colon Y_0 \to X$ é uma aplicação quasi-linear, então existe uma aplicação quasi-linear $\Omega\colon Y \to X$ tal que $\Omega(y) = \Omega_0(y)$, para todo $y \in Y_0$. Mais ainda, se $\varphi\colon Y \to X$ é uma aplicação quase linear tal que $\varphi(y) = \varphi_0(y)$, para todo $y \in Y_0$, então Ω e φ são equivalentes.

Desse modo, podemos definir uma aplicação quasi-linear

$$\Omega_2\colon \ell_2 \to \ell_2,$$

que estende $\tilde{\Omega_2}$.

O espaço de Kalton-Peck, que denotaremos por Z_2, é a soma torcida $\ell_2 \oplus_{\Omega_2} \ell_2$, ou seja:

$$Z_2 = \left\{ ((y_n),(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \times \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \left| y_n + x_n \log\log\left(\frac{\|x\|_2}{|x|}\right)\right|^2 < \infty \right\}$$

A quasi-norma associada a Ω_2 é equivalente a uma norma, e portanto, Z_2 é um espaço de Banach.

Conjectura-se desde a déecada de 80 que Z_2 não é isomorfo a nenhum de seus hiperplanos.

Proposição 69. Sejam X e Y dois espaços normados isomorfos. Então, se X é separável, Y também é separável.

Demonstração. Seja D um subespaço denso e enumerável em X. Como X e Y são isomorfos, existe um isomorfismo $T\colon X \to Y$. Considere o conjunto

$$\mathcal{D} = \{T(x) : x \in D\}$$

Observe que $\mathcal{D} \subset Y$, e $\mathcal{D}$ é enumerável, pois $|\mathcal{D}| = |D| = \aleph_0$. Vamos mostrar que $\overline{\mathcal{D}} = Y$. Para isso, sabemos que, dado $x \in X$, existe uma sequência $(x_n) \in D$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Dado $y \in Y$, existe um $x \in X$ tal que $y = T(x)$. Logo, como $T^{-1}(y) = x$, existe uma sequência $(T^{-1}(y_n)) = (x_n) \in D$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} T^{-1}(y_n) = T^{-1}(y)$. Como $x_i \in D$, então $y_i = T(x_i) \in \mathcal{D}$. Assim, concluímos que para qualquer $y \in Y$, existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = T(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}$ que converge a y. Portanto, $\mathcal{D}$ é denso e enumerável em Y, e Y é separável.

□

Exemplo 48. ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ nãao são isomorfos a ℓ_∞, pois ℓ_∞ não é separável, mas c_0, ℓ_p são.

Exemplo 49. c_0 e ℓ_p não são isomorfos.

Exemplo 50. ℓ_p é isomorfo a $(\ell_p)^2$, para $1 \leq p \leq \infty$. Basta considerar

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \ell_p & \longrightarrow & \ell_p \oplus \ell_p \\ & & (x_n) & \longmapsto & ((x_{2n}),(x_{2n+1})) \end{array}$$

Para $\ell_p \oplus \ell_p$ munido da norma p, temos que T é uma isometria, e para outras normas equivalentes em $\ell_p \oplus \ell_p$, T é isomorfismo.

6.1 Espaços de dimensão finita

Vamos ver alguns resultados acerca de espaços de dimensão finita à luz da teoria desenvolvida até o momento.

Proposição 70. Qualquer espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja X um espaço normado de dimensão n finito. Então $X \cong K^n$, e K^n é completo com $\|\boldsymbol{.}\|_2$, por exemplo. Logo, X é completo. $\square$

Corolário 5. Todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado.

Demonstração. Seja X um espaço normado e Y um subespaço de X com dimensão finita. Como Y é de dimensão finita, pela proposição anterior, Y é de Banach, logo Y é fechado em X.

$\square$

Proposição 71. Qualquer aplicação linear definida num espaço normado de dimensão finita é contínua.

Demonstração. É suficiente provar o resultado para $X = K^n$, pois isomorfismos preservam linearidade, sendo uma propriedade topológica.

Para $(K, \|\boldsymbol{.}\|_2)$, considere $T\colon K^n \to Y$ linear. Seja $(e_i)_{i=1}^n$ a base canônica de K^n, e considere $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in K^n$. Então, temos que

$$T(x) = T\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i T(e_i)$$

Assim,

$$\|T(x)\| = \left\|\sum x_i T(e_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|T(e_i)\| \leq \max\{\|T(e_i)\|\} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = M\|x\|_1,$$

onde $M = \max\{\|T(e_i)\|\}$. Portanto, T é contínuo. $\square$

Observação 12. Se X é um espaço de dimensão infinita, existe um T linear e não contínuo. Por exemplo,

$$\begin{array}{rcccl} D & : & \mathcal{P}[0,1] & \longrightarrow & \mathcal{P}[0,1] \\ & & x & \longmapsto & D(x) = x' \end{array}$$

D é linear mas não é contínuo.

Para o próximo resultado, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2 (Lema de Riesz)**.** Seja X um espaço normado, e Y um subespaço fechado de X. Então, dado $0 < \varepsilon < 1$, existe um $x_0 \in S_X$ tal que

$$d(x_0, Y) \geq 1 - \varepsilon$$

Demonstração. Seja $\overline{x} \in X/Y$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, com $\|\overline{x}\| = 1 = \inf_{z \in \overline{x}} \|z\|$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $z_0 \in \overline{x}$ tal que

$$1 \leq \|z_0\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Observe que $\overline{z_0} = \overline{x_0} \Rightarrow d(z_0, Y) = d(x, Y) = 1$.

Seja $x_0 = \frac{z_0}{\|z_0\|}$. Assim, $x_0 \in S_X$. Além disso,

$$d(x_0, Y) = d\left(\overline{z_0}\|z_0\|, Y\right) = \frac{1}{\|z_0\|} d(z_0, Y) = \frac{1}{\|z_0\|} 1 = \frac{1}{\|z_0\|} \geq 1 - \varepsilon$$

□

Teorema 16. Seja X um espaço normado. São equivalentes:

(i) X tem dimensão finita;

(ii) Os fechados e limitados de X são os compactos;

(iii) B_X é compacto.

Demonstração. **(i) ⇒ (ii)** Se $\dim X < \infty$, então $X \cong K^{\dim X}$. Em $(K^{\dim X}, \|\mathbf{.}\|_2)$, vale que os compactos são os fechados e limitados. Logo, o s fechados e limitados em X são os compactos.

(ii) ⇒ (iii) B_X é fechado e limitado. Logo, B_X é compacto.

(iii) ⇒ (i) Para mostrar que B_X não é compacto, vamos construir uma sequência em B_X que não admite uma subsequência convergente.

Seja X normado de dimensão infinita. Seja $x_0 \in X$. Pelo Lema de Riesz, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, e $Y = [x_0]$, note que T é fechado, pois é de dimensão finita, e também é um subespaço próprio, pois $\dim X = \infty$.

Existe um $x_1 \in S_X$ tal que

$$d(x_1, [x_0]) \geq \frac{1}{2}$$

Em particular, $\|x_1 - x_0\| \geq \frac{1}{2}$.

Considere $Z = [x_0, x_1]$. Então, novamente pelo Lema de Riesz, existe um $x_2 \in S_X$ tal que

$$d(x_2, [x_0, x_1]) \geq \frac{1}{2}$$

Indutivamente, encontramos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in S_X$ tais que

$$d(x_{n+1}, [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \frac{1}{2}$$

Logo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B_X^{\mathbb{N}}$, tais que

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n \neq m$$

Assim, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não tem subsequência convergente. Portanto, B_X não é compacto. □

6.2 Espaços $\mathcal{L}(X,Y)$

Vamos estudar agora os espaços de todos os operadores lineares e suas propriedades.

Definição 89. Sejam X e Y espaços normados. Denotamos por $\mathcal{L}^c(X,Y)$ [1] o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas de X em Y com as operações usuais.

Em particular, quando $Y = K$, $\mathcal{L}^c(X,K)$ é o *espaço dual* X^*, ou seja, o espaço dos funcionais lineares contínuos em X. Este é conhecido como *dual topológico*.

Denotamos por $X^\sharp$ o espaço vetorial $\mathcal{L}(X,K)$ dos funcionais lineares em X, também conhecido como *dual algébrico*, que é amplamente estudado em disciplinas de Álgebra Linear.

Em espaços vetoriais, não há distinção entre duals topológicos e algébricos, pois todos os funcionais lineares são contínuos, ou seja:

$$X^* = X^\sharp$$

Observação 13. Em geral, se V é um espaço normado de dimensão finita, todos os funcionais lineares são contínuos. Assim, $V^* = V^\sharp$. Veremos adiante que, se X possui dimensão infinita, então sempre ocorre $X^* \neq X^\sharp$, ou seja, sempre poderemos encontrar um funcional linear que não é contínuo.

Para estudar propriedades de $\mathcal{L}^c(X,Y)$, vamos tentar muní-lo de uma norma.

Proposição 72. A função

$$\begin{array}{rcrcl} \|\cdot\| & : & \mathcal{L}^c(X,Y) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & T & \longmapsto & \|T\| = \sup\limits_{x\in B_X} \big\|T(x)\big\| \end{array}$$

é uma norma para $\mathcal{L}^c(X,Y)$.

Demonstração. De fato, temos que:

1. $\|T\| = 0 \Rightarrow \big\|T(x)\big\| = 0\ \forall x \in B_X$, e pela linearidade, $T(x) = 0$ para todo $x \in X$. Logo, $T = 0$.

2. Temos para todo $\alpha \in K$ que

$$\|\alpha T\| = \sup_{x\in B_X} \big\|\alpha T(x)\big\| = |\alpha| \sup_{x\in B_X} \big\|T(x)\big\| = |\alpha|\|T\| \Rightarrow \|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$$

3. Se $T, U \in \mathcal{L}^c(X,Y)$, então

$$\|T+U\| = \sup_{x\in B_X} \big\|(T+U)(x)\big\| = \sup_{x\in B_X} \big\|T(x)+U(x)\big\| \leq \sup_{x\in B_X} \big\|T(x)\big\| + \big\|U(x)\big\| =$$

$$\|T\| + \|U\| \Rightarrow \|T+U\| \leq \|T\| + \|U\|$$

[1] Usualmente o espaço é denotado somente por $\mathcal{L}(X,Y)$, mas estamos adicionando o c para enfatizar a questão das aplicações serem contínuas e estabelecer uma distinção com relação à mesma notação utilizada no estudo dos espaços duais em Álgebra Linear, com o objetivo de evitar confusões por conta da notação.

$\square$

Observação 14. Se $T \in Li$, então

$$\|T(x)\| \leq \|T\|$$

para todo $x \in B_X$.

Se $x \neq 0$, temos que $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\|$, o que implica

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Se $M \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ $\forall x \in X$, então $\|T(x)\| \leq M$ $\forall x \in B_X$. Logo, $\|T\| \leq M$.

Podemos caracterizar $\|T\|$ como o menor M que satisfaz

$$\|T(x)\| \leq M \quad \forall x \in B_X$$

Observação 15. Se $T \in \mathcal{L}^c(X,Y)$, então

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\|.$$

Exemplo 51. Se T é o operador nulo, então é claro que

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| = 0 \Rightarrow \|T\| = 0$$

Exemplo 52. Se Id é o operador identidade, ou seja

$$\begin{array}{rcccl} Id & : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & 1 \end{array}$$

então

$$\|Id\| = \sup_{x \in B_X} \|Id(x)\| = 1 \Rightarrow \|Id\| = 1$$

Exemplo 53. Fixado $\kappa\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, seja T o operador integral, dado por

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1]) \\ & & f & \longmapsto & T(f) = (T(f))(t) = \int\limits_0^1 \kappa(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s \end{array}$$

então

$$\|T(f)\| = \max_{t \in [0,1]} \left| \int\limits_0^1 \kappa(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s \right| \leq \max_{t \in [0,1]} \int\limits_0^1 |\kappa(t,s)| |f(s)|\,\mathrm{d}s \leq$$

$$\left(\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \left|\kappa(t,s)\right| \mathrm{d}s\right) \|f\|_\infty \Rightarrow \|T\| \leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \left|\kappa(t,s)\right| \mathrm{d}s$$

Na verdade, pode-se mostrar que

$$\|T\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \left|\kappa(t,s)\right| \mathrm{d}s$$

Exemplo 54. Seja $1 \leq p < \infty$, e condiere $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequêncai em ℓ_p fixada. Tome a aplicação

$$\begin{array}{rrcl} T \; : & \ell_p & \longrightarrow & \ell_p \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & T(x_n) = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Vamos calcular a norma de T. Temos:

$$\begin{array}{rrcl} & \left\|T(x_n)\right\|_p & = & \left\|(a_n x_n)\right\|_p \\ & & = & \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ & & \leq & \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \|x_n\|_\infty \\ & & = & \|a\|_p \|x_n\|_\infty \\ \Rightarrow & \|T\| & \leq & \|a\|_p \end{array}$$

Tomando $x_n = 1$, temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, e $\|x\|_\infty = 1$. Assim, para esta sequência

$$\left\|T(x_n)\right\|_p = \|a\|_p \|x_n\|_\infty = \|a\|_p \Rightarrow \|a\|_p \leq \|T\|.$$

Portanto, temos que $\|T\| = \|a\|_p$.

Vamos verificar agora em que condições o espaço normado $(\mathcal{L}^c(X,Y), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Teorema 17. Sejam X e Y espaços normados e Y um espaço de Banach. Então, $\mathcal{L}^c(X,Y)$ é de Banach.

Demonstração. Precisamos mostrar que toda sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^c(X,Y)$ é convergente. Para isso, utilizaremos fortemente o fato de Y ser de Banach.

Considere $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^c(X,Y)$. Sendo de Cauchy, sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 > 0$ tal que, para todo $m, n > n_0$,

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$$

Para $x \in X$ não-nulo fixado.

Portanto, temos que

$$\big\|T_n(x)-T_m(x)\big\| = \big\|(T_n-T_m)(x)\big\| \leq \|T_n-T_m\|\|x\| = \frac{\varepsilon}{\|x\|}\|x\| = \varepsilon$$

Logo, para cada $x \in X$, $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em Y.
Sendo Y um espaço de Banach, então $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.
Defina

$$\begin{array}{rcccl} T & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & x & \longmapsto & T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) \end{array}$$

Vamos mostrar que $T \in \mathcal{L}^c(X,Y)$. Para isso, basta ver que T é linear e contínuo.

- T é linear, pois para $x, y \in X$ e $\lambda \in K$:

$$T(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lambda T_n(y) =$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(y) = T(x) + \lambda T(y)$$

- T é contínua, pois $\forall\ x \in X$:

$$\big\|T(x)\big\| = \lim_{n\to\infty}\big\|T_n(x)\big\| \leq \lim_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|\|x\| \Rightarrow \big\|T(x)\big\| \leq M\|x\|$$

  onde $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|$. Note que $M < \infty$, pois toda sequência de Cauchy é limitada.

Resta agora mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ em $\mathcal{L}^c(X,Y)$.
Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n > n_0$,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon$$

Em particular, pela continuidade da norma:

$$\begin{array}{rrcl} \forall x \in B_X: & \Big\|T_n(x)-T_m(x)\Big\| & < & \varepsilon \\ \Rightarrow & \lim\limits_{m\to\infty}\Big\|T_n(x)-T_m(x)\Big\| & = & \big\|T_n(x)-T(x)\big\| \\ & & \leq & \|T_n - T\| \\ & & < & \varepsilon \end{array}$$

Logo, $\mathcal{L}^c(X,Y)$ é completo e consequentemente um espaço de Banach. □

Observação 16. Note que a condição de Y ser de Banach é estritamente necessária. Por exemplo, $\mathcal{L}(\ell_\infty, c_{00})$ não é completo. Na verdade, veremos mais adiante que se Y não for completo, $\mathcal{L}^c(X,Y)$ também não será.

Corolário 6. Seja X um espaço normado. Então $\mathcal{L}^c(X,K) = X^*$ é um espaço de Banach.

Proposição 73. Seja X um espaço normado de dimensão infinita. Então $X^* \neq X^\sharp$.

Demonstração. Vamos construir um funcional linear que não é contínuo.

Consideremos $\Gamma = \{e_\gamma : \gamma \in J\}$ uma base de Hamel de X.

Sendo J infinito, consideremos $I \subseteq J$ infinito e enumerável, e $\Gamma' = \{e_{\gamma_n} : \gamma_n \in I\}$. Defina $f \in X^\sharp$ por

$$\begin{array}{rcll} f & : & X & \longrightarrow K \\ & & e_\gamma & \longmapsto \begin{cases} n & \text{se } \gamma = \gamma_n \\ 0 & \text{se } \gamma \notin I \end{cases} \end{array}$$

Estendendo por linearidade a X,isto é, para $x \in X$, $x = \sum\limits_{\gamma \in F} \lambda_j e_j$, $F \subset J$ finito. Então, considere

$$f(x) = \sum_{\gamma \in F} \lambda_i f(e_\gamma)$$

Vamos mostrar que $f \notin X^*$.

De fato, $\left|f(e_{\gamma_n}\right| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, f não é limitada em B_X. Logo, f não pode ser contínua, e portanto $X^* \neq X^\sharp$. $\square$

Exemplo 55. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ é contínua mas não é linear, como já visto.

Exemplo 56. Seja $f \in \mathcal{C}([0,1])^*$, dada por

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

f é linear, contínua e $\|f\| = 1$. De fato, a linearidade segue pela linearidade da integral. Além disso,

$$\left|f(x)\right| = \left|\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int \left|x(t)\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|x\|_\infty\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 \mathrm{d}t\right) \|x\|_\infty = 1 \cdot \|x\|_\infty.$$

Portanto, f é contínua e $\|f\| \leq 1$.

Tomando $x(t) = 1$ $\forall t \in [0,1]$,, segue que

$$f(x) = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t \Rightarrow \|f\| \geq 1,$$

o que implica $\|f\| = 1$.

Exemplo 57. Dado $t_0 \in [0,1]$ fixado, seja $f \in \mathcal{C}([0,1])^*$, dada por

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = x(t_0) \end{array}$$

f é linear, contínua e $\|f\| = 1$. Para $x, y \in \mathcal{C}([0,1])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x+\lambda y) = (x+\lambda y)(t_0) = x(t_0) + \lambda y(t_0) = f(x) + \lambda f(y) \Rightarrow \boxed{f \text{ é linear.}}$$

$$\left|f(x)\right| = \left|x(t_0)\right| \leq \|x\|_\infty \Rightarrow \boxed{f \text{ é contínua.}}$$

$\|f\| \leq 1$. Mas para a função $x(t) = 1, \forall t \in [0,1]$, temos

$$\left|f(x)\right| = \left|x(t_0)\right| = |1| = 1 \Rightarrow \left\|f\right\| \leq 1.$$

Logo, $\|f\| = 1$.

Proposição 74. Sejam X um espaço normado e $f \in X^\sharp$. Então, $f \in X^*$ se e somente se $\ker(f)$ é fechado em X.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $f\colon X \to K$ é linear e contínua. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\ker(f)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ pela continuidade de f. Logo, como $f(x_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, segue que $f(x) = 0$, implicando $x \in \ker(f)$. Isso mostra que $\ker(f) = \overline{\ker(f)}$. Logo, $\ker(f)$ é fechado.

($\Leftarrow$) Seja $f \in X^\sharp$ tal que $\ker(f)$ é fechado. Se f não for contínua, ára cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_X$ tal que $\left|f(x_n)\right| > n$.

Se $\ker(f) = X$, não há o que fazer. Caso contrário, seja $a \in X$ tal que $f(a) = 1$, e considere a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por

$$y_n = a - \frac{f(a)}{f(x_n)} x_n$$

Observe que

$$\begin{aligned} f(y_n) &= f\left(a - \tfrac{f(a)}{f(x_n)} x_n\right) \\ &= f(a) - f\left(\tfrac{f(a)}{f(x_n)} x_n\right) \\ &= f(a) - \tfrac{f(a)}{f(x_n)} f(x_n) \\ &= f(a) - f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty} a - \tfrac{f(a)}{f(x_n)} x_n \\ &= a - \lim_{n\to\infty} \tfrac{f(a)}{f(x_n)} x_n \\ &= a - 0 \\ &= a. \end{aligned}$$

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, e

$$\begin{aligned}
\|a - y_n\| &= \left\| a - \left(a - \frac{f(a)}{f(x_n)} x_n \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{f(a)}{f(x_n)} x_n \right\| \\
&= \left\| \frac{f(a)}{f(x_n)} \right\| \|x_n\| \\
&= \frac{|f(a)|}{|f(x_n)|} \\
&< \frac{|f(a)|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois por hipótese $a \notin \ker(f)$, já que $f(a) = 1$. $\square$

6.3 Extensões de aplicações lineares

Iremos estudar agora condições para a quais conseguimos estender o domínio de certa aplicação linear contínua.

Proposição 75. Seja X um espaço normado e Y um espaço de Banach. Seja Z um subsepaço de X e $T \in \mathcal{L}^c(Z, Y)$. Então, T admite uma única aplicação linear $\overline{T} \in \mathcal{L}^c(\overline{Z}, Y)$ que a estende, ou seja, $\overline{T} \restriction_Z = T$. Neste caso,

$$\left\|\overline{T}\right\| = \|T\|$$

Demonstração. Dado $z \in \overline{Z}$, temos que $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, onde $z_n \in Z$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Consideremos a sequência $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ em Y. Como Y é de Banach, $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 > 0$ tal que $\forall m, n > n_0$,

$$\left\|T(z_n) - T(z_m)\right\| = \left\|T(z_n - z_m)\right\| \leq \|T\| \|z_n - z_m\| < \varepsilon$$

Sendo $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, é de Cauchy em Z e $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em Y.

Sendo Y de Banach. $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Definimos

$$\begin{array}{rccl}
\overline{T} : & \overline{Z} & \longrightarrow & Y \\
& z & \longmapsto & \overline{T}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} T(z_n)
\end{array}$$

onde $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Observe que $\overline{T}$ está bem definida, pois dadas sequências $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\ infty} \xi_n = z$, temos que

$$\left\|T(z_n) - T(\xi_n)\right\| = \left\|T(z_n - \xi_n)\right\| \leq \|T\| \|z_n - \xi_n\|$$

Tomando os limites para $n \to \infty$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|T(z_n) - T(\xi_n)\right\| \leq \lim_{n\to\infty} \|z_n - \xi_n\| \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|T(z_n) - T(\xi_n)\right\| \leq \|z - \xi\| \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|T(z_n) - T(\xi_n)\right\| \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|T(z_n) - T(\xi_n)\right\| = 0$$

Então, $\lim\limits_{n\to\infty} T(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} T(\xi_n)$.

Observe que $\overline{T}$ estende T : se $z \in Z$, tomando a sequência $z_n = z$, temos que

$$\overline{T}(z) = \lim_{n\to\infty} T(z_n) = T(z) \Rightarrow \overline{T} \restriction_Z = T$$

Mostremos que $T \in \mathcal{L}^c(\overline{Z}, Y)$. Temos que:

- $\overline{T}$ é linear: sejam $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências em Z tais que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \overline{Z}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta \in \overline{Z}$, e considere $\lambda \in K$. Então:

$$\begin{aligned}
\overline{T}(z + \lambda\zeta) &= \lim_{n\to\infty} T(z_n + \lambda\zeta_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} T(z_n) + \lambda T(\zeta_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} T(z_n) + \lim_{n\to\infty} \lambda T(\zeta_n) \\
&= \overline{T}(z) + \lambda\bar{(T)}(\zeta)
\end{aligned}$$

- $\overline{T}$ é contínua: Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Z tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \overline{Z}$. Então:

$$\left\|\overline{T}(z)\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T(z_n)\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|T(z_n)\right\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\|\|z_n\| =$$

$$\|T\| \lim_{n\to\infty} \|z_n\| = \|T\|\|z\| \Rightarrow \left\|\overline{T}(z)\right\| \leq \|T\|\|z\|$$

  Portanto, T é contínua, e $\left\|\overline{T}\right\| \leq \overline{T}$.

Ainda, como $\overline{T}$ é extensão de T, é claro que $\|T\| \leq \left\|\overline{T}\right\|$, pois

$$\|T\| = \sup_{z\in B_Z} \left\|T(z)\right\| = \sup_{z\in B_Z} \left\|\overline{T}(z)\right\| \leq \sup_{z\in B_{\overline{Z}}} \left\|\overline{T}(z)\right\| = \left\|\overline{T}\right\|$$

Logo, $\left\|\overline{T}\right\| = \|T\|$.

Finalmente, falta apenas mostrar a unicidade da extensão $\overline{T}$. Como dois operadores contínuos que coincidem num subespaço denso são iguais, segue que o operador definido é única. [2] $\square$

[2] Em geral, duas funções contínuas que coincidem num subespaço denso so domínio são iguais.

Observação 17. A condição de Y ser um espaço de Banach é estritamente necessária. Como contra-exemplo, considere a função identidade em $Id\colon c_{00} \to c_{00}$. Sabemos que $\overline{c_{00}} = c_0$, mas Id não admite uma extensão contínua T em c_0, ou seja,

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[dr, "\nexists\, T"] & \\ c_{00} \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r] & c_{00} \end{tikzcd}$$

Observação 18. Considere a função identidade em $Id\colon c_0 \to c_0$. Não existe extensão T de c_0 em ℓ_∞, pois $\overline{c_0} \neq \ell_\infty$, ou seja:

$$\begin{tikzcd} \ell_\infty \arrow[dr, "\nexists\, T"] & \\ c_0 \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r] & c_0 \end{tikzcd}$$

Logo, a proposição só permite estender T ao fecho.

Para funcionais $f\colon X \to K$, veremos adiante que sempre existe uma $T\colon Y \to K$ que realiza esse serviço, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "\exists!\, T"] & \\ X \arrow[u, hook, "f"] \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

Proposição 76. Sejam X um espaço noramdo e Y um subespaço fechado de X. A aplicação quociente

$$\begin{array}{rcccl} \pi & : & X & \longrightarrow & X/Y \\ & & x & \longmapsto & \pi(x) = \overline{x} \end{array}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

1. π é uma aplicação linear contínua;

2. π leva a bola unitária aberta de X na de X/Y, ou seja

$$\pi(B_X(0;1)) = B_{X/Y}(\overline{0};1)$$

3. π é uma aplicação aberta, ou seja $\pi(U)$ é aberto em X/Y para todo U aberto em X.

4. $\ker(\pi) = Y$.

Demonstração. 1. Pela definição das operações em X/Y, π é claramente linear. Dado $x \in X$, pela definição da norma em X/Y temos que

$$\big\|\pi(x)\big\| = \|\overline{x}\| \leq \|x\| \quad \forall x \in X.$$

o que mostra que π é contínua.

2. Sejam $B_X(0;1)$ e $B_{X/Y}(\overline{0};1)$ as bolas unitárias abertas de X e X/Y respectivamente. Se $x \in B_X(0;1)$, então
$$\left\|\pi(x)\right\| = \|\overline{x}\| \leq \|x\| < 1.$$
Logo, $\pi(x) = \overline{x} \in_{X/Y} (\overline{0};1)$. Portanto, $\pi(B_X(0;1)) \subseteq B_{X/Y}(\overline{0};1)$.

   Seja agora $\overline{x} \in B_{X/Y}(\overline{0};1)$. Então $\|\overline{x}\| < 1$. Novamente pela definição de ínfimo, existe$y \in overline{x}$ tal que
$$\|x\| \leq \|y\| < 1$$
Então $y \in B_X(0;1)$ e $\pi(y) = \overline{y} = \overline{x}$, e portanto $\pi(B_X(0;1)) \supseteq B_{X/Y}(\overline{0};1)$.

   De qualquer modo, concluímos que $\pi(B_X(0;1)) = B_{X/Y}(\overline{0};1)$

3. Considere um conjunto $\mathcal{U} \neq \emptyset$ aberto em X e $x_0 \in \pi(\mathcal{U})$. Então $\overline{x_0} = \pi(z)$, para algum $z \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ é um conjunto aberto, deve existir um $r > 0$ tal que $z + rB_X(0;1) \subseteq \mathcal{U}$. Segue pela linearidade de π e pelo item anterior que
$$\pi(z + rB_X(0;1) \subseteq \pi(\mathcal{U}) \Rightarrow \pi(z) + r\pi(B_X(0;1)) \subseteq \pi(\mathcal{U}) \Rightarrow \overline{x_0} + rB_{X/Y}(\overline{0};1) \subseteq \pi(\mathcal{U})$$
Segue que $\pi(\mathcal{U})$ é um conjunto aberto.

4. Temos que
$$x \in \ker(\pi) \Rightarrow \pi(x) = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow x \in Y \Rightarrow \boxed{\ker(\pi) = Y}$$

□

Proposição 77. Sejam X e Y espaços normados e $T \in \mathcal{L}^c(X,Y)$. Seja
$$\begin{array}{rcccl} \tilde{T} & : & X/\ker(T) & \longrightarrow & Y \\ & & \overline{x} & \longmapsto & \tilde{T}(\overline{x}) = T(x) \end{array}$$
Então, $\tilde{T}$ é linear e contínua e $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$. Em outras palavras, temos que o seguinte diagrama é comutativo:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\ker(T) \arrow[ur, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $\tilde{T}$ está bem definida. Para $x_1, x_2 \in X$:
$$\overline{x}_1 = \overline{x}_2 \Leftrightarrow \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \in Y = \ker(T) \Leftrightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow T(x_1) = T(x_2)$$
Vamos mostrar aogra que $\tilde{T} \in \mathcal{L}^c(X/\ker(T), Y)$.

- $\tilde{T}$ é linear, pois para $\overline{x}, \overline{y} \in X/\ker(T)$, e $\lambda \in K$:

$$\tilde{T}(\overline{x} + \lambda\overline{y}) = T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) = \tilde{\overline{x}} + \lambda\tilde{\overline{y}}$$

- $\tilde{T}$ é contínua, pois analisando o diagrama, constata-se que $T = \tilde{T} \circ \pi$. Como T e π são contínuas, segue que $\tilde{T}$ também é.

Além disso,

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \sup_{\overline{x} \in B_{X/\ker(T)}} \left\|\tilde{T}(\overline{x}\right\| = \sup_{\overline{x} \in B_{X/\ker(T)}} \left\|\tilde{T}(\overline{x})\right\| =$$

$$\sup_{x \in B_X} \left\|\tilde{T}(\pi(x))\right\| = \sup_{x \in B_X} \left\|(\tilde{T} \circ \pi)(x)\right\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| = \|T\|$$

□

6.4 Teorema de Hahn-Banach

Sejam X e Y espaços normados e Z um subespaço de X. Nem sempre uma aplicação linear contínua $T\colon Z \to Y$ pode ser estendida continuamente para X. (EXEMPLOS). O Teorema de Hahn-Banach assegura que sempre é possível realizar essa extensão quando $Y = K$.

Além disso, o Teorema de Hahn-Banach responde algumas perguntas naturais que tem resposta claramente positiva em espaços de dimensão finita. Se X é um espaço normado, será que

♥ Existe um funcional linear contínuo não-nulo em X?

♣ Dado $x_0 \in X$ não-nulo, existe um funcional linear f contínuo tal que $f(x_0) = 1$?

♦ Dado $x_0 \in X$ não-nulo, existe um hiperplano fechado H tal que

$$X = H \oplus Kx_0?$$

♠ Dado subespaço Y de X e $f \in Y^*$, existe $\varphi \in X^*$ tal que φ é extensaõ de f e $\|\varphi\| = \|f\|$?

Vamos enunciar este importante teorema, e demonstrar alguns resultados antes de prová-lo.

Teorema 18 (Teorema de Hahn-Banach)**.** Seja X um espaço normado e $x_0 \in X$. Então, existe $p \in X^*$ extensão de f com $\|p\| = \|f\|$.

Alguns dos resultados imediatos que o Teorema de Hahn-Banach fornece são os seguintes:

Corolário 7. Seja X um espaço normado e $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Então, $\exists \varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ e $\|\varphi\| = 1$.

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{cccc} f & : & [x_0] & \longrightarrow & K \\ & & \lambda x_0 & \longmapsto & \lambda\|x_0\| \end{array}$$

Como já é de praxe, vamos verificar que $f \in [x_0]^*$. De fato:

- f é linear, pois dados $\lambda x_0, \eta x_0 \in [x_0]$ e $\kappa \in K$, temos que

$$f(\lambda x_0 + \kappa\eta x_0) = f((\lambda+\kappa\eta)x_0) = (\lambda+\kappa\eta)\|x_0\| = \lambda\|x_0\| + \kappa\eta\|x_0\| = f(\lambda x_0) + \kappa f(\eta x_0)$$

- f é contínua, pois

$$\big|f(\lambda x_0)\big| = |\lambda|\|x_0\| = \|\lambda x_0\|$$

Assim, $\|f\| = 1$. Pelo Teorema de Han-Banach, existe $\varphi \in X^*$ extensão de f tal que $\|\varphi\| = \|f\| = 1$. Além disso,

$$\varphi(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$$

□

Corolário 8. Seja X um espaço normado e $x_0 \in X$. Então

$$\|x_0\| = \max_{\varphi \in B_{X^*}} \big|\varphi(x_0)\big|$$

Demonstração. Se $\varphi \in B_{X^*}$,

$$\big|\varphi(x_0)\big| \leq |\varphi|\|x_0\| \leq \|x_0\|$$

Usando o funcional $\phi \in X^*$ obtido no corolário 7 anterior, temos que

$$\phi(x_0) = \|x_0\|$$

□

Corolário 9. Seja X um espaço normado e $x_0 \in X$ não-nulo. Então existe um hiperplano fechado H em X tal que

$$X = H \oplus Kx_0$$

e

$$d(x_0, H) = \|x_0\|$$

Demonstração. Seja $\phi \in X^*$ do corolário 7. Tomemos $H = \ker(\phi)$. É claro que $H \cap Kx_0 = \{0\}$. Para todo $x \in X$,

$$x = \underbrace{\left(x - \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)}x_0\right)}_{\in H} + \underbrace{\frac{\phi(x)}{\phi(x_0)}x_0}_{Kx_0} \Rightarrow X = H \oplus Kx_0.$$

Além disso, $d(x_0, H) \leq \|x_0\|$.

Seja $h \in H$. Então:

$$\phi(x_0 - h) = \phi(x_0) = \|x_0\|$$

$$\big|\phi(x_0 - h)\big| \leq \|\phi\|\|x_0 - h\| = \|x_0 - h\|$$

Logo, concluímos que $\|x_0\| \leq \|x_0 - h\|,\ \forall h \in H$. Portanto $\|x_0\| \leq d(x_0, H)$. Assim,

$$d(x_0, H) = \|x_0\|$$

□

Corolário 10. Seja X um espaço normado e Y um subespaço fechado de X, e $x_0 \in X \setminus Y$. Então, existe $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e

- $\varphi(x_0) = d(x_0, Y)$
- $\varphi(y) = 0, \forall y \in Y$

Demonstração. Se $\overline{x_0} \in X/Y$, $\overline{x_0} \neq \overline{0}$, então $\|\overline{x_0}\| = d(x_0, Y)$. Do corolário 7, existe $\phi^* \in (X/Y)^*$ tal que $\phi^*(\overline{x_0}) = \|\overline{x_0}\|$ e $\|\phi^*\| = 1$.

Considere

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & X & \longrightarrow & K \\ & & x & \longmapsto & \phi^*(x) \end{array}$$

Observe que $\varphi = \phi^* \circ \pi$. Segue que $\|\varphi\| = \|\phi^*\| = 1$. Além disso, temos que:

- $\varphi(x_0) = \phi^*(\overline{x_0}) = d(x_0, Y)$
- $\varphi(y) = \phi^*(\overline{y}) = d(y, Y) = 0, \forall y \in Y$

□

Definição 90. Seja X um espaço vetorial sobre K. Uma função $p\colon X \to \mathbb{R}$ é *sublinear* se satisfaz

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X$.

p é dita uma *seminorma* se é sublinear e

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X$$

Proposição 78. Se $p\colon X \to \mathbb{R}$ é uma seminorma, então $p(x) \geq 0$, para todo $x \in X$.

Demonstração. Temos que

$$0 = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$$

□

Lema 3. Sejam X um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear, Y subespaço de X, com $X \neq Y$. Sejam $x_0 \in X \setminus Y$ e $f\colon Y \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$\forall y \in Y : f(y) \leq p(y)$$

Então existe φ funcional em $Z = Y \oplus [x_0]$ tal que:

(i) $\forall y \in Y : \varphi(y) = f(y)$.

(ii) $\forall z \in Z : \varphi(z) \leq p(z)$.

Demonstração. Sejam $y, y' \in Y$. Temos que:

$$f(y) + f(y') = f(y + y') \leq p(y + y') = p(y - x_0 + x_0 + y') \leq p(y - x_0) + p(x_0 + y')$$

Daí,

$$f(y) + f(y') \leq p(y - x_0) + p(x_0 + y') \Rightarrow f(y) - p(y - x_0) \leq p(x_0 + y') - f(y') \Rightarrow$$

$$\sup_{y \in Y}\{f(y) - p(y - x_0)\} \leq \inf_{y' \in Y}\{p(x_0 + y') - f(y')\}$$

Considere $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{y \in Y}\{f(y) - p(y - x_0)\} \leq a \leq \inf_{y' \in Y}\{p(x_0 + y') - f(y')\}$$

Seja $z \in Z$. Então, $z = y + \lambda x_0$. Considere $\varphi(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda a$.
Como $\lambda \in \mathbb{R}$, temos 2 casos a considerar:

1. Caso 1: $\lambda > 0$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \varphi(z + \lambda x_0) \\
&= f(y) + \lambda a \\
&\leq f(y) + \lambda p\left(x_0 + \tfrac{y}{\lambda}\right) - f\left(\tfrac{y}{\lambda}\right) \\
&= \lambda p\left(x_0 + \tfrac{y}{\lambda}\right) \\
&= p(y + \lambda x_0)
\end{aligned}$$

2. Caso 2: $\lambda < 0$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \varphi(z + \lambda x_0) \\
&= f(y) + \lambda a \\
&\leq f(y) + \lambda f\left(\frac{y}{-\lambda}\right) - p\left(\frac{y}{-\lambda} - x_0\right) \\
&= (-\lambda) p\left(\tfrac{y}{\lambda} - x_0\right) \\
&= p(y + \lambda x_0) \\
&= p(z)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 79. Sejam X um $\mathbb{R}$- espaço vetorial e $Y \subset X$ um subespaço vetorial de X. Seja $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear. Se f é um funcional em Y tal que

$$\forall y \in Y : f(y) \leq p(y)$$

Então existe um funcional linear φ em X tal que:

- $\forall y \in Y : \varphi(y) = f(y)$
- $\forall x \in X : \varphi(x) \leq p(x)$.

Demonstração. Consideremos o conjunto $\mathcal{A}$ dos pares (Z, φ) tais que:

- Z é um subespaço vetorial de X que contém Y.
- φ é um funcional linear em Z.
- $\forall z \in Z : \varphi(z) \leq p(z)$.

Observe que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pois $(Y, f) \in \mathcal{A}$. Vamos definir uma ordem parcial em $\mathcal{A}$, dada por

$$(Z, \varphi) \leq (Z', \varphi') \Leftrightarrow Z \subseteq Z' \text{ e } \varphi' \restriction_Z = \varphi.$$

A ideia será utilizar o Lema de Zorn 1 no conjunto $\mathcal{A}$. Para isso, precisamos verificar que toda cadeia (i. e., subconjunto totalmente ordenado) possui cota superior.

Seja

$$C = \{(Z_i, \varphi_i), i \in I\}$$

uma cadeia em $(\mathcal{A}, \leq)$. Considere

$$Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$$

Note que Z é um subespaço vetorial de Z, por causa da relação de ordem criada. [3]

Defina

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & Z & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & z & \longmapsto & \varphi(z) = \varphi_i(z) \text{ se } z \in Z_i \end{array}$$

Observe que tal função não depende de Z_i. É fácil ver que $(Z, \varphi) \in \mathcal{A}$:

- Z é subespaço vetorial de X, $Z \supseteq Y$;
- $\varphi(y) = f(y), \forall y \in Y$;
- $\varphi(z) = \varphi_i(z) \leq p(z), \forall z \in Z$.

Logo, (Z, φ) é uma cota superior de C.

Pelo Lema de Zorn, existe $(\mathfrak{Z}, \psi)$ um elemento maximal de $(\mathcal{A}, \leq)$. Vamos provar que $\mathfrak{Z}$ na verdade é o espaço todo, ou seja:

[3] É importante lmebrar que nem sempre a união de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial! Isto só acontece nesse caso por causa da relação de ordem.

Afirmação 1. $\mathfrak{Z} = X$.

Demonstração. Se $\mathfrak{Z} \neq X$, seja $x_0 \in X, x_0 \notin \mathfrak{Z}$.

Tomando $W = \mathfrak{Z} \oplus [x_0]$, segue do lema anterior que existe um $\psi'\colon W \to \mathbb{R}$ funcional linear tal que $\psi'(y) = f(y)$ para todo $y \in Y$ e $\psi'(w) \leq p(w)$, para todo $w \in W$.

Assim, $(W, \psi') \in \mathcal{A}$ e $(\mathfrak{Z}, \psi) < (W, \psi')$, um absurdo, pois $(\mathfrak{Z}, \psi)$ é maximal. $\square$

$\square$

Demonstração do Teorema de Hahn-Banach. Seja X um espaço normado real e $Y \subseteq X$ subespaço vetorial e $f \in Y^*$. Escrevemos $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. Então:

$$f(y) \leq \left|f(y)\right| \leq \|f\|\|y\| = p(y)$$

Pela proposição 79 anterior, existe $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

- $\varphi(y) = f(y), \forall y \in Y$;
- $\varphi(x) \leq p(x) = \|f\|\|x\|, \forall x \in X$.

Daí, concluímos que $\left|\varphi(x)\right| \leq \|f\|\|x\|$, para todo $x \in X$.

Assim, $\varphi \in X^*$ e $\|\varphi\| \leq \|f\|$. Por outro lado, $\|\varphi\| \geq \|f\|$, pois φ é uma extensão de f. $\square$

Podemos também estender o Teorema de Hahn-Banach para espaços normados complexos. Para isso, vamos relembrar algumas relações entre espaços lineares reais e complexos.

Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Então, X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, que denotaremos por $X_{\mathbb{R}}$, a partir da restrição da multiplicação por escalar $\mathbb{R} \times X \to X$. Se $\varphi \in X^*$, então

$$u = \operatorname{Re} \varphi \in X_{\mathbb{R}}^* \quad \text{e} \quad v = \operatorname{Im} \varphi \in X_{\mathbb{R}}^*$$

Além disso,

$$v(x) = \operatorname{Re}(-i\varphi(x)) = -\operatorname{Re}(\varphi(ix)) = -u(ix)$$

Por outro lado, se $u \in X_{\mathbb{R}}^*$, definimos

$$\varphi(x) = u(x) + iv(x) = u(x) - iu(ix)$$

Assim, $\varphi \in X^*$. Além disso, é $\mathbb{C}$-linear, pois

$$\begin{aligned} \varphi(ix) &= u(ix) - iu(i(ix)) \\ &= i(u(x)) + u(ix) \\ &= i(\varphi(x)) \end{aligned}$$

Teorema 19 (Teorema de Hahn-Banach analítico)**.** Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, Y subespaço de X e $p\colon X \to \mathbb{R}$ uma seminorma. Seja f um funcional linear em Y tal que

$$\left|f(y)\right| \leq p(y), \quad \forall y \in Y$$

Então, existe um funcional linear φ em X tal que

- $\varphi(y) = f(y), \forall y \in Y$;
- $\big|\varphi(x)\big| \leq p(x), \forall x \in X$.

Demonstração. Consideremos $u = \mathrm{Re}(f)$. Então:

$$u(y) \leq \big|u(y)\big| \leq \big|f(y)\big| \leq p(y), \quad \forall y \in Y$$

Aplicando o Teorema de Hahn-Banach, existe $\vartheta\colon X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

- $\vartheta(y) = u(y), \forall y \in Y$;
- $\vartheta(x) \leq p(x), \forall x \in X$.

Consideremos $\nu\colon X \to \mathbb{R}$ definida por $\nu(x_0) = -\vartheta(ix)$. Temos que

$$\nu(y) = -\vartheta(iz) = -\vartheta(iz) = v(y), y \in Y$$

Definimos

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi & : & X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & x & \longmapsto & \varphi(x) = \vartheta(x) + i\nu(x) \end{array}$$

Temos que φ é $\mathbb{C}$-linear.

φ é extensão de f, pois

$$\varphi(y) = \vartheta(y) + i\nu(y) = u(y) + iv(y) = f(y), \ \forall y \in Y$$

Seja $x \in X$, e escreva $\varphi(x) = e^{i\theta}\big|\varphi(x)\big|$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} \big|\varphi(x)\big| & = & e^{-i\theta}\varphi(x) \\ & = & \varphi(e^{-i\theta}x) \\ & = & \mathrm{Re}(\varphi(e^{i\theta}x)) \\ & = & \nu(e^{i\theta}x) \\ & \leq & p(e^{-i\theta}x) \\ & = & p(x) \text{ pois p é seminorma.} \end{array}$$

□

Vamos agora procurar dar uma interpretação geométrica para o Teorema de Hahn-Banach, pensando na separação de convexos.

Definição 91. Seja X um espaço normado, e $C \subseteq X$ um subconjunto qualquer. A *Função de Minkowski* de C é dada por

$$\mu_C(x) = \inf\{t > 0 : x \in tC\}$$

Exemplo 58. Seja $C = B_X$. Então:

$$\mu_{B_X}(x) = \inf\{\lambda > 0\colon x \in \lambda B_X\}$$

Se $x \in \lambda B_X$, então $\|x\| \leq \lambda$. Assim,

$$\mu_{B_X}(x) = \|x\|$$

Exemplo 59. Seja $X = \mathbb{R}^2$, e

$$C = \{(\lambda, 2\lambda), \lambda \in \mathbb{N}\}.$$

Então, para $x = (\alpha, \alpha)$, temos que

$$\mu_C(\alpha, \alpha) = \inf\{\lambda > 0\colon (\alpha, \alpha) \in \lambda C\} = \infty$$

Proposição 80. Sejam X um espaço normado, $C \subseteq X$ subconjunto convexo tal que 0 é ponto interior de C. Então μ_C é sublinear.

Demonstração. Vejamos que $\mu_C(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in X$. Como 0 é ponto interior de C, existe $r > 0$ tal que $B(0; r) \subseteq C$. Se $x \in X$, $x \neq 0$,

$$\frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in C \Rightarrow x \in 2\frac{\|x\|}{r} C$$

Logo, $\mu_C(x) < \infty$. μ_C é sublinear: Sejam $\alpha > 0, x \in X$:

$$\mu_C(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0 : \alpha x \in \lambda C\} = \alpha \inf\{\frac{\lambda}{\alpha} : x \in \frac{\lambda}{\alpha} C\} = \alpha \mu_C(x)$$

Sejam $x, y \in X$ e $\lambda, \gamma > 0$, tais que

$$x \in \gamma C \quad \text{e} \quad y \in \lambda C$$

Note queops

$$x + y \in \gamma C + \lambda C = (\gamma + \lambda)\left(\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} + \frac{\lambda}{\gamma + \lambda}\right) \subseteq (\gamma + \lambda)C,$$

pela convexidade de C. Logo, $\mu_C(x + y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$, para todos $x, y \in X$. □

Teorema 20. Sejam X espaço normado, $C \subseteq X$ subespaço convexo e fechado e $x_0 \notin C$. Então, existe $f \in X^*$ tal que

$$\sup\{\mathrm{Re}(f(x)), x \in C\} < \mathrm{Re}(f(x_0))$$

Demonstração. Vamos dividir a demonstração desse teorema no caso real e no caso complexo.

Para o caso real, sendo X um espaço normado real, podemos supor sem perda de generalidade que $0 \in C$, pois caso contrário, tomando $y_0 \in C$, basta aplicar $x_0 = y_0$ e $C - \{y_0\}$.

Seja $\delta = d(x_0, C) > 0$. Considere

$$D = \left\{ x \in X : d(x, C) \leq \frac{\delta}{2} \right\}$$

Como $0 \in C$, então $\frac{\delta}{4} B_X \subseteq D$ (se $\|x\| \leq \frac{\delta}{4}$, então $d(x, C) \leq \frac{\delta}{4}$. Assim, 0 é ponto interior de D. Como D é convexo e fechado e $x_0 \notin D$, pela proposição anterior, μ_D é sublinear. Seja

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & [x_0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \lambda x_0 & \longmapsto & \lambda \mu_D(x_0) \end{array}$$

Observe que $\varphi(x) \leq \mu_D(x)\ \forall x \in [x_0]$, pelo Teorema de Hahn-Banach. Dado $x \in [x_0]$, então $x = \lambda x_0$. Temos dois casos a analisar:

- Caso $1 : \lambda > 0 :$

$$\varphi(x) = \varphi(\lambda x_0) = \lambda \mu_D(x_0) = \mu_D(\lambda x_0) = \mu_D(x)$$

- Caso $2 : \lambda \leq 0 :$

$$\varphi(x) = \varphi(\lambda x_0) = \lambda \mu_D(x_0) \leq 0 \leq \mu_D(\lambda x_0) = \mu_D(x)$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear φ em X tal que

- $\varphi(\lambda x_0) = \lambda \mu_D(x_0), \forall \lambda \in \mathbb{R};$
- $\varphi(x) \leq \mu_D(x), \forall x \in X.$

Se $x \in C$, então $x \in D$, $\mu_D \leq 1$. Assim, $\sup\{\varphi(x) : x \in C\} \leq 1$. Por outro lado,

$$\varphi(x_0) = \mu_D(x_0) > 1$$

Vamos verificar que $\varphi \in X^*$.

Como $\frac{\delta}{4} B_X \subseteq D$, para $x \in X, x \neq 0 :$

$$\varphi\left(\frac{\delta}{4} \frac{x}{\|x\|}\right) \leq \mu_D(y) \leq 1 \quad (y \in D)$$

Assim,

$$\varphi(x) \leq \frac{4}{\delta}\|x\| \Rightarrow \left|\varphi(x)\right| \leq \frac{4}{\delta}\|x\|, \quad \forall x \in X$$

Para o caso complexo, considere

$$\psi(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix).$$

Então

$$\mathrm{Re}(\psi(x_0)) > \sup\{\mathrm{Re}(\varphi(x)) : x \in C\}$$

$\square$

Teorema 21. Seja X um espaço normado. Se X^* é separável, então X é separável.

Demonstração. Como X^* é separável, então pela proposição 59, S_{X^*} é separável. Seja $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto denso em S_{X^*}.

Consideremos para cada um dos funcionais certo $x_n \in B_X$ tal que $\left|f_n(x_n)\right| \geq \frac{1}{2}$.

Seja $Y = \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$. Então, pela proposição 61, Y é separável.

Vejamos que $Y = X$. Suponhamos $X \neq Y$, e tome $x \in X \setminus Y$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ tal que

- $f(x) = d(x, Y) > 0$;
- $f(y) = 0, \ \forall y \in Y$;
- $\|f\| = 1$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \left|(f_n - f)(x_n)\right| \leq \|f_n - f\|\|x_n\| \leq \|f_n - f\|$$

Como $f(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $x_n \in Y$, temos que

$$\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \left|f_n(x_n) - 0\right| = \left|f_n(x_n)\right| \leq \|f_n - f\| \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \left|f_n(x_n)\right| \leq \|f_n - f\|$$

Isto contradiz que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em S_{X^*}, pois $f \in S_{X^*}$. Concluímos que $X = Y$, portanto X é separável. $\square$

Capítulo 7

Espaços Duais e Espaços Reflexivos

7.1 Espaços Duais

7.1.1 Dual de um espaço de dimensão finita

Proposição 81. Seja X um espaço normado de dimensão finita, e considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de X. Podemos definir $e_i^* \in X^*$ por

$$e_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) = \lambda_i,$$

Tomando

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

Então, $\Gamma = \{e_i^*, 1 \leq i \leq n\}$ é uma base para X^*.

Demonstração. Note que Γ é um conjunto LI de X^*. De fato, considere a seguinte combinação linear

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = \alpha_1 e_1^* + \ldots + \alpha_n e_n^* = 0$$

A igualdade anterior significa que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*\right)(x) = 0, \quad \forall x \in X$$

Em particular, se $x = e_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*\right)(e_i) = (\alpha_1 e_1^* + \ldots + \alpha_n e_n^*)(e_i) = \alpha_i = 0,\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

Portanto, Γ é composto de elementos linearmente independentes.

Além disso, Γ é gerador de X^*. Dado $\varphi \in X^*$, para $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, temos

$$\varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*(x)$$

Assim, Γ é base de X^*. □

Corolário 11. Se X é um espaço normado de dimensão finita, então X e X^* são isomorfos.

Demonstração. Se $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ é base de X, então $\{e_i^* : 1 \leq i \leq n\}$ é base de X^*. Como as duas bases possuem a mesma cardinalidade, então $\dim(X) = \dim(X^*)$. Logo, X e X^* são isomorfos. □

7.1.2 Dual de um espaço de dimensão infinita

Espaço dual de c_0

Vamos encontrar o espaço dual de c_0. Comecemos com o seguinte resultado preliminar:

Proposição 82. Para cada $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| < \infty$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{k} |x_n||y_n| \leq \sum_{n=1}^{k} \|x\|_\infty |y_n| = \|x\|_\infty \sum_{n=1}^{k} |y_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$. □

Vamos definir agora um funcional que está no espaço dual de c_0.

Proposição 83. Para cada $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$, defina

$$\begin{array}{rccl} \varphi_y \ : & c_0 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \varphi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \end{array}$$

Então $\varphi_y \in c_0$, e $\left\|\varphi_y\right\| = \|y\|_1$.

Demonstração. Veja que, para $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned}\varphi_y(a+\lambda b) &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\lambda b_n)y_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda b_ny_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}b_ny_n \\ &= \varphi_y(a)+\lambda\varphi_y(b).\end{aligned}$$

Logo, φ_y é linear. Além disso, φ_y é contínua, pois para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$,

$$\left|\varphi_y(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n| \leq \|x\|_{\infty}\|y\|_1.$$

Portanto, $\varphi_y \in c_0^*$. Vamos verificar que $\left\|\varphi_y\right\| = \|y\|_1$. Da última equação, já sabemos que $\left\|\varphi_y\right\| \leq \|y\|_1$.

Seja $z \in K$. Defina a função $\operatorname{sgn}\colon K \to K$, dada por

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases}\frac{|z|}{z}, & \text{se } z \neq 0\\ 0, \text{se } z = 0\end{cases}$$

Observe que, se $z \neq 0$, então

$$\left|\operatorname{sgn}(z)\right| = \left|\frac{|z|}{z}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1 \Rightarrow \left|\operatorname{sgn}(z)\right| = 1$$

Ademais,

$$z\left|\operatorname{sgn}(z)\right| = z\frac{|z|}{z} = |z| \Rightarrow z\left|\operatorname{sgn}(z)\right| = |z|$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos

$$z_k = (\operatorname{sgn}(y_1), \operatorname{sgn}(y_2), \ldots, \operatorname{sgn}(y_k), 0, 0, 0, \ldots) = \sum_{n=1}^{k}\operatorname{sgn}(y_n)e_n \in B_{c_0}$$

Desse modo, como $\left\|\varphi_y\right\| = \sup\limits_{x\in B_{c_0}}\left|\varphi_y(x)\right|$, temos que

$$\left\|\varphi_y\right\| \geq \left|\varphi_y(z_k)\right| = \left|\sum_{n=1}^{k}z_ny_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{k}\operatorname{sgn}(y_n)y_n\right| = \sum_{n=1}^{k}|y_n| \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Logo, $\left\|\varphi_y\right\| \geq \sum_{n=1}^{\infty}|y_n| = \|y\|_1$. Assim, $\left\|\varphi_y\right\| = \|y\|_1$. $\square$

O resultado acima nos fornece uma família de exemplos de elementos de c_0^*.

Exemplo 60. Seja $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Então,

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi_\alpha & : & c_0 & \longrightarrow & K \\ & & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \varphi_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\alpha_n \end{array}$$

Tomando $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, temos que

$$\varphi_\alpha\left(\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)\left(\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n} = \frac{1}{5}.$$

Exemplo 61. Seja $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Então,

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi_\beta & : & c_0 & \longrightarrow & K \\ & & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \varphi_\beta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\alpha_n \end{array}$$

Tomando $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, temos que

$$\varphi_\beta\left(\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2n^2} = \frac{2\pi^2}{3} + 4(\log(4) - 3)$$

Vamos verificar agora que, na verdade, todo funcional de c_0^* é da forma de φ_y.

Proposição 84. O dual de c_0 é isométrico a ℓ_1, ou seja, para cada $f \in c_0^*$, existe um único $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ tal que $f = \varphi_y$.

Demonstração. Considere

$$\begin{array}{rcrcl} T & : & \ell_1 & \longrightarrow & c_0^* \\ & & y & \longmapsto & T(y) = \varphi_y \end{array}$$

Veja que T é linear, pois para $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, \beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, $\lambda \in K$, temos

$$T(\alpha + \lambda\beta) = \varphi_{\alpha+\lambda\beta} = \varphi_\alpha + \lambda\varphi_\beta = T(\alpha) + \lambda T(\beta),$$

e $\|T(y)\| = \|\varphi_y\| = \|y\|$. Vamos verificar que T é sobrejetora. Seja $f \in c_0^*$. Escrevemos $y_k = f(e_k), k \in \mathbb{N}$. Vejamos que $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, seja

$$z_N = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(y_n)e_n \in B_{c_0}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|f\| &\geq \left|f(z_N)\right| \\ &= \left|f\left(\sum_{n=1}^{N}\operatorname{sgn}(y_n)e_n\right)\right| \\ &= \left|\sum_{n=1}^{N}\operatorname{sgn} y_n f(e_n)\right| \\ &= \sum_{n=1}^{N}\operatorname{sgn}(y_n)y_n \\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{|y_n|}{y_n}y_n \\ &= \sum_{n=1}^{N}|y_n|.\end{aligned}$$

Logo, $\sum\limits_{n=1}^{N}|y_n| \leq \|f\|, \forall N \in \mathbb{N}$. Assim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n| \leq \|f\|$. Portanto, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. $f = \varphi_y$, pois $f(e_i) = \varphi_y(e_i), \forall i \in \mathbb{N}$, e $[e_i : i \in \mathbb{N}]$ é denso em c_0 e f, φ são contínuas. Como f, φ_y são contínuas e coincidem num conjunto denso, segue que $f = \varphi_y$. Assim, T é sobrejetora. $\square$

7.1.3 Dual dos espaços ℓ_p

Proposição 85. Seja $1 < p < \infty$. O dual de ℓ_p é isométrico a ℓ_q, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Seja $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q$. Defina

$$\begin{aligned}\varphi_a \quad : \quad \ell_p &\longrightarrow K \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \varphi_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\end{aligned}$$

Considere $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q$ e $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Segue da Desigualdade de Hölder 5 que

$$\sum_{n=1}^{N}|a_n x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{n=1}^{N}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|a\|_q\|x\|_p, \forall N \in \mathbb{N}$$

Logo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n \leq \|a\|_q\|x\|_p$, e φ_a está bem definida.

φ_a é linear, pois dados $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ e $\lambda \in K$,

$$\varphi_a(x + \lambda y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_n + \lambda y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \varphi_a(x) + \lambda\varphi_a(y)$$

Além disso, φ é contínua e $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$.

Consideremos $z_N = \sum_{n=1}^{N} (\text{sgn}(a_n)|a_n|^{q-1})e_n$. Então:

$$\begin{aligned}
\|z_N\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{N} \left|\text{sgn}(a_n)|a_n|^{q-1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} \left|\text{sgn}(a_n)\right|^p |a_n|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} \left|\text{sgn}(a_n)\right|^p |a_n|^{q}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^{q}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\varphi_a(z_N) = \sum_{n=1}^{N} \text{sgn}(a_n)|a_n|^{q-1} a_n = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^q$$

Assim,

$$\|\varphi_a\| \geq \left|\varphi_a\left(\frac{z_n}{\|z_n\|_p}\right)\right| = \frac{\sum_{n=1}^{N} |a_n|^q}{\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Portanto, $\|\varphi_a\| \geq \|a\|_q$, e $\|\varphi_a\| = \|a\|_q$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcrcl} T & : & \ell_q & \longrightarrow & \ell_p^* \\ & & a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & T(a) = \varphi_a \end{array}$$

Notemos que T é linear, e

$$\|T(a)\| = \|\varphi_a\| = \|a\|_q, \quad \forall a \in \ell_q$$

T é sobrejetora: tomemos $f \in \ell_p^*$, e $a_n = f(e_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vejamos que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q$. Seja $z_N = \sum_{n=1}^{N} \text{sgn}(a_n)|a_n|^{q-1} e_n$. Então

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^q = f(z_N) \leq \|f\| \|z_N\|_p$$

Mas

$$\|f\| \geq \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^q}{\left(\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Obtemos que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q$.

Observe que $f = \varphi_a$, pois ambas são contínuas e coincidem em $[e_i : n \in \mathbb{N}]$, que é um conjunto denso em ℓ_p. $\square$

Proposição 86. O dual de ℓ_1 é isométrico a ℓ_∞, ou seja, para todo $f \in \ell_1^*$ existe uma única sequência $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1.$$

A função que associa $f \to a$ é uma isometria entre ℓ_1^* e ℓ_∞. Isso mostra que não vale a recíproca do teorema 21, pois ℓ_∞ não é separável.

7.1.4 Duais de subespaços e de quocientes de Espaços de Banach

Definição 92. Seja X um espaço normado. Dado $A \subseteq X$, definimos o *anulador* de A como:

$$A^\perp = \{f \in X^* | f(a) = 0, \forall a \in A\}$$

Sendo $B \subseteq X^*$, definimos o *anulador à esquerda* por

$$^\perp B = \{x \in X | f(x) = 0 \forall f \in B\}$$

Observação 19. $A^\perp$ e $^\perp B$ são subespaços fechados de X^* e X, respectivamente.

Proposição 87. Seja X um espaço normado e $A \subseteq X$. Então

$$^\perp(A^\perp) = \overline{[A]}$$

Demonstração. Exercício. $\square$

Proposição 88. Sejam X um espaço normado e Y subespaço fechado de X. Então, o dual de X/Y é isométrico a $Y^\perp$.

Demonstração. Seja $\pi\colon X \to X/Y$, e considere φ satisfazendo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi\circ\pi"] & \\ X/Y \arrow[rr, "\varphi"] & & K \end{tikzcd}$$

Tomemos

$$\begin{array}{rccl} T & : & (X/Y)^* & \longrightarrow & Y \\ & & \varphi & \longmapsto & T(\varphi) = \varphi \circ \pi \end{array}$$

Veja que T está bem definida, pois $\pi(y) = \{\overline{0}\}$. Consideremos

$$\begin{array}{rccl} S & : & Y^{\perp} & \longrightarrow & (X/Y)^* \\ & & \psi & \longmapsto & \begin{array}{rccl} S(\psi) & : & X/Y & \longrightarrow & K \\ & & \overline{x} & \longmapsto & \psi(x) \end{array} \end{array},$$

Onde $S(\psi)(\overline{x}) = \psi(x)$. Vejamos que está bem definida.

$$x' \in \overline{x} \Leftrightarrow x - x' \in Y \Leftrightarrow \psi(x - x') = 0 \Leftrightarrow \psi(x') = \psi(x)$$

Também verifica-se que

- $S \circ T = Id_{(X/Y)^*}$:

  Veja que
  $$(S \circ T)(\varphi) = S(T(\varphi)) = S(\varphi \circ \pi)$$
  Para $\overline{x} \in (X/Y)$, temos que
  $$S(\varphi \circ \pi)(\overline{x}) = (\varphi \circ \pi)(x) = \varphi(\pi(x)) = \varphi(\overline{x})$$
  Portanto, $(S \circ T)(\varphi) = \varphi$.

- $T \circ S = Id_{Y^{\perp}}$
  $$(T \circ S)(\psi) = T(S(\psi)) = S(\psi) \circ \pi$$
  Para $x \in X$, temos que
  $$(S(\psi) \circ \pi)(x) = (S(\psi))(\pi(x)) = (S(\psi))(\overline{x}) = \psi(x)$$
  Portanto, $(T \circ S)(\psi) = \psi$.

Assim, S e T são bijeções lineares. Notando que $\pi(B_X) = B_{X/Y}$, temos:

$$\begin{aligned} \|S(\psi)\| &= \sup_{\overline{x} \in B_{X/Y}} \|S(\psi)(\overline{x})\| \\ &= \sup_{x \in B_X} \|S(\psi)(\pi(x))\| \\ &= \sup_{x \in B_X} \|\psi(x)\| \\ &= \|\psi\| \end{aligned}$$

□

Proposição 89. Sejam X espaço normado e Y subespaço de X. Então Y^* é isométrico a $X^*/Y^{\perp}$.

Demonstração. Consideremos

$$\begin{array}{rcccl} T & : & X^*/Y^{\perp} & \longrightarrow & Y^* \\ & & \overline{f} & \longmapsto & T(\overline{f}) = f \hookrightarrow_Y \end{array}$$

Veja que T está bem-definida. Seja $g \in \overline{f} \Rightarrow g - f \in Y^{\perp}$. Logo:

$$\begin{array}{rcl} g - f \in Y^{\perp} & \Rightarrow & (g-f)(y) = 0 \quad \forall y \in Y \\ & \Rightarrow & g(y) = f(y) \quad \forall y \in Y \\ & \Rightarrow & g \hookrightarrow_Y = f \hookrightarrow_Y \end{array}$$

Também temos que T é linear: dados $\overline{f}, \overline{g} \in X^*/Y^{\perp}$, e $\alpha \in K$, temos que

$$T(\overline{f} + \alpha\overline{g}) = (\overline{f} + \alpha\overline{g}) \hookrightarrow_Y = \overline{f} \hookrightarrow_Y + \alpha\overline{g} \hookrightarrow_Y = T(\overline{f}) + \alpha T(\overline{g})$$

A função T é sobrejetora, pois dada $\psi \in Y^*$, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ uma extensão de ψ.

Assim, $T(\overline{f}) = f \hookrightarrow_Y = \psi$. Portanto, é sobrejetora.

Vejamos que $\left\|T(\overline{f})\right\| = \left\|\overline{f}\right\|$. Sejam $\overline{f} \in X^*/Y^{\perp}$ e $g = T(\overline{f})$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, g admite extensão $\varphi \in X^*$, tal que $\|g\| = \|\varphi\|$. Como $f - \varphi = 0$ em Y :

$$T(\overline{f}) = f \hookleftarrow_Y = g \quad g = \varphi \hookleftarrow_Y \Rightarrow \overline{f} = \overline{\varphi}$$

Portanto, podemos supor $\|f\| = \|g\|$. Se $\psi \in Y^{\perp}$, então g e $f + \psi$ coincidem em Y.

$$\begin{array}{rcl} \|g\| & = & \sup\{\left|g(y)\right| : y \in B_Y\} \\ & = & \sup\{\left|(f+\psi)(y)\right| : y \in B_Y\} \\ & \leq & \sup\{\left|(f+\psi)(x)\right| : x \in B_X\} \\ & = & \|f + \psi\| \end{array}$$

Assim, $\|g\| \leq \inf\{\|f + \psi\| : \psi \in Y^{\perp}\} = \left\|\overline{f}\right\| \leq \|g\|$.

Portanto, $\left\|T(\overline{f})\right\| = \left\|\overline{f}\right\|$. Assim, T é uma isometria sobrejetora. $\square$

7.2 Operadores Adjuntos

Definição 93. Sejam X e Y espaços normados e $T \in \mathcal{L}^c(X, Y)$. O *operador adjunto* (ou *transposto*) $T^* \in \mathcal{L}^c(Y^*, X^*)$ é definido por

$$(T^*(f))(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y^*, \forall x \in X$$

ou seja, $T^*(f) = f \circ T$.

Exemplo 62. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y) = (x, 2x+y, -y)$. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $f(a,b,c) = 2a+3b+5c$. Vamos definir $T^*(f)$. Note que

$$\begin{array}{rcl} T^*(f) &=& f\circ T \\ \Rightarrow\quad (T^*(f))(x,y) &=& f(T(x,y)) \\ &=& f(x,2x+y,-y) \\ &=& 2x+3(2x+y)+5(-y) \\ &=& 8x-2y \end{array}$$

Assim,

$$(T^*(f))(x,y) = 8x-2y$$

É fácil ver que T^* é linear e contínuo, pois

$$\|T^*(f)\| = \|f\circ T\| \leq \|T\|\|f\|, \quad \forall f \in Y^*$$

Em particular, $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Para cada $x_0 \in X$, se $T(x_0) \neq 0$, então pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in Y^*$ com $\|f\| = 1$ e $|f(T(x_0))| = \|T(x_0)\|$.

$$\|T(x_0)\| = |f(T(x_0))| = |T^*(f)(x_0)| \leq \|T^*\|\|f\|\|x_0\| = \|T^*\|\|x_0\|$$

Portanto, $\|T(x)\| \leq \|T^*\|\|x\|$, para todo $x \in X$. Isso implica que $\|T\| \leq \|T^*\|$. Concluímos que $\|T\| = \|T^*\|$.

Proposição 90. Sejam X, Y e Z espaços normados e $T, S \in \mathcal{L}^c(X,Y)$, $R \in \mathcal{L}^c(Y,Z)$ e $\alpha \in K$. Então:

(i) $(S+T)^* = S^* + T^*$;

(ii) $(\alpha T)^* = \alpha T^*$;

(iii) $(Id_X)^* = Id_{X^*}$;

(iv) $(R\circ T)^* = T^* \circ R^*$.

Demonstração. **(i)** Dado $f \in Y^*$, temos que:

$$(S+T)^*(f) = f\circ(S+T) = f\circ S + f\circ T = S^*(f) + T^*(f) = (S^*+T^*)(f)$$

(ii) Dado $f \in Y^*$, temos que:

$$(\alpha T)^*(f) = f\circ(\alpha T) = \alpha(f\circ T) = \alpha T^*(f)$$

(iii) Dado $f \in Y^*$, temos que:

$$(Id_X)^*(f) = f\circ Id_X = f = Id_{X^*}(f)$$

(iv) Dado $f \in Y^*$, temos que:

$$(R \circ T)^*(f) = f \circ (R \circ T) = (f \circ R) \circ T = T^*(f \circ R) = T^*(R^*(f)) = (T^* \circ R^*)(f)$$

□

Proposição 91. Sejam X e Y espaços normados e $T \in \mathcal{L}^c(X, Y)$. Então:

(i) $\mathrm{Ker}T^* = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$.

(ii) $\mathrm{Ker}T =^\perp (ImT^*)$.

Demonstração. **(i)** Seja $f \in \mathrm{Ker}T^*$. Então, $T^*(f) = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} T^*(f) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad T^*(f)(x) = f(T(x)) = 0, \quad \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow \quad f \in (ImT)^\perp \end{aligned}$$

(ii) Se $x \in \mathrm{Ker}T$, então

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}T \quad &\Rightarrow \quad T(x) = 0 \\ &\Rightarrow \quad f(T(x)) = 0, \quad \forall f \in Y^* \\ &\Rightarrow \quad (T^*(f))(x) = 0 \\ &\Rightarrow \quad x \in^\perp (\mathrm{Im}\, T^*) \end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{Ker}T \subseteq^\perp (\mathrm{Im}\, T^*)$.

Agora, se $x \in^\perp (\mathrm{Im}\, T^*)$, então $(T^*(f))(x) = 0$, o que implica $f(T(x)) = 0$, para todo $f \in Y^*$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, $T(x) = 0$, e portanto $x \in \mathrm{Ker}T$. Assim, ${}^\perp(\mathrm{Im}\, T^*) \subseteq \mathrm{Ker}T$. Concluímos que $\mathrm{Ker}T =^\perp (ImT^*)$.

□

Proposição 92. Sejam X e Y espaços normados e $T \in \mathcal{L}^c(X, Y)$. Se T é um isomorfismo (isometria, respectivamente), então T^* é um isomorfismo (isometria, respectivamente). Além disso, temos que

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Demonstração. Suponhamos que $T\colon X \to Y$ é um isomorfismo. Então $T^*\colon Y^* \to X^*$ e $(T^{-1})^*\colon X^* \to Y^*$ são contínuas. Utilizando as propriedades vistas na proposição 90,

$$Id_X = T^{-1} \circ T \Rightarrow (Td_X)^* = (T^{-1} \circ T)^* = T^* \circ (T^{-1})^* = Id_{X^*}$$

$$Id_Y = T \circ T^{-1} \Rightarrow Id_{Y^*} = (T \circ T^{-1})^* = (T^{-1})^* \circ T^*$$

Assim, T^* é uma bijeção. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, que é contínua. Portanto, T^* é um isomorfismo.

Se T é uma isometria, então

$$\left\|T^*\right\| = \|T\| = 1$$

e

$$\left\|(T^*)^{-1}\right\| = \left\|(T^{-1})^*\right\| = \left\|T^{-1}\right\| = 1$$

Assim, T^* é uma isometria. □

Corolário 12. Se X e Y são espaços normado isomorfos (isométricos, respectivamente), então X^* e Y^* são isomorfos (isométricos, respectivamente).

Observação 20. A recíproca não é verdadeira. Observe que $c^* = \ell_1$ e $c_0^* = \ell_1$. Logo, c^* e c_0^* são isométricos, mas c e c_0 não são.

Em geral, dado Y subespaço denso de um espaço normado X, então X^* e Y^* são isométricos, mas X e Y não são isomorfos.

7.3 Espaços Biduais e Completamento

Definição 94. Seja X um espaço normado.O *bidual* de X é o espaço $(X^*)^*$, que denotaremos por X^{**}.

Exemplo 63. Sabemos que $c_0^* \equiv \ell_1$ e $\ell_1^* \equiv \ell_\infty$. Então:

$$c_0^{**} = (c_0^*)^* = {\ell_1}^* = \ell_\infty \Rightarrow c_0^{**} \equiv \ell_\infty$$

Exemplo 64. Sabemos que, dado $1 < p < \infty$, temos que $\ell_p^* = \ell_q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então:

$$\ell_p^{**} = (\ell_p^*)^* = {\ell_q}^* = \ell_p \Rightarrow \ell_p^{**} = \ell_p$$

Tal qual feito anteriormente, podemos definir operadores nos biduais.

Definição 95. Seja $x_0 \in X$. Denotamos por $\pi(x_0) \in X^{**}$, dada por

$$(\pi(x_0))(f) = f(x_0), \quad \forall f \in X^*.$$

$\pi(x_0)$ é um funcional linear em X^*.

Proposição 93. $\pi(x_0)$ é um funcional linear contínuo, e

$$\big\|\pi(x_0)\big\| = \|x_0\|$$

Demonstração. De fato,

$$\big\|\pi(x_0)\big\| = \sup_{f \in B_{X^*}} \big|(\pi(x_0))(f)\big| = \sup_{f \in B_{X^*}} \big|f(x_0)\big| = \|x_0\|$$

Assim, $\pi(x_0) \in X^{**}$ e $\big\|\pi(x_0)\big\| = \|x_0\|$. □

Definição 96. A função

$$\begin{array}{rccc} \pi & : & X & \longrightarrow & X^{**} \\ & & x & \longmapsto & \pi(x) \end{array}$$

é uma imersão isométrica de X em X^{**} chamada de *imersão canônica* de X em X^{**}.

A partir da imersão canônica, podemos provar que todo espaço normado possui completamento.

Teorema 22. Seja X um espaço normado. Então (a menos de isometrias) existe um único espaço de Banach Z e uma única imersão isométrica $T\colon X \to Z$ tal que $T(X)$ é denso em Z.

Ou seja, se W é outro espaço de Banach tal que existe $S\colon X \to W$ imersão isométrica com $S(X)$ denso em W, então Z e W são isométricos.

Demonstração. Seja $\pi\colon X \to X^{**}$ a imersão canônica. Considere

$$Z = \overline{\pi(X)} \subseteq X^{**}$$

Sendo X^{**} um espaço de Banach, então como $Z = \overline{\pi(X)}$ é um subespaço fechado de X^{**}, segue que Z é um espaço de Banach.

Além disso, $\pi\colon X \to Z$ é uma imersão isométrica tal que $\pi(X)$ é denso em Z.

Vamos agora verificar a unicidade a menos de isometrias. Seja W um espaço de Banach e $S\colon X \to W$ uma imersão isométrica tal que $S(X)$ é denso em W. Então

$$R = S \circ \pi^{-1}\colon \pi(X) \to W$$

é uma imersão isométrica, e $\operatorname{Im}(R) \supseteq S(X)$ é denso em W. Então existe $\tilde{R}\colon \overline{\pi(X)} = Z \to W$ contínua que é extensão de R. Além disso:

$$\left\|\tilde{R}(z)\right\| = \left\|R(z)\right\| = \|z\|, \quad \forall z \in \pi(X)$$

Como $\pi(X)$ é denso em Z e $\tilde{R}$ é contínua, $\left\|\tilde{R}(z)\right\| = \|z\|$, para todo $z \in Z$. Ainda,

$$\operatorname{Im}\tilde{R} \supseteq \operatorname{Im} R \supseteq S(X)$$

em W, e $\operatorname{Im}\tilde{R}$ é fechado. Logo, $\operatorname{Im}\tilde{R} = W$.

Assim, $\tilde{R}$ é sobrejetora e portanto uma isometria de Z sobre W. □

7.4 Reflexividade

Definição 97. Seja X um espaço normado. Dizemos que X é *reflexivo* se a imersão canônica $\pi\colon X \to X^{**}$ é sobrejetora.

Observação 21. Todo espaço normado X reflexivo é de Banach, pois é isométrico a X^{**}, que é um espaço de Banach.

Exemplo 65. Todo espaço normado de dimensão finita é reflexivo. De fato, se $\dim X = n$, então $\dim X^* = \dim X^{**} = n$. Portanto π é sobrejetora.

Exemplo 66. Os espaços ℓ_p $(1 < p < \infty)$ são reflexivos. Sabemos que $\ell_p^* = \ell_q$. Consideremos as imersões canônicas

$$T_p\colon \ell_p \to \ell_q^*$$

$$T_q\colon \ell_q \to \ell_p^*$$

Seja $\pi\colon \ell_p \to \ell_p^{**}$ a imersão canônica. Seja $\psi \in \ell_p^{**}$, temos que $\psi \circ T_q \in \ell_q^*$. Então existe $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ tal que

$$\psi \circ T_q = T_p(x)$$

Dado $f \in \ell_p^*$, então $f = T_q(y)$, onde $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q$.
Assim,

$$\psi(f) = \psi \circ T_q(y) = (T_p(x))(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f(x) = (\pi(x))(f)$$

Portanto, $\psi = \pi(x)$. Logo, π é sobrejetora. Concluímos que ℓ_p é reflexivo.

Exemplo 67. c_0 não é reflexivo. Se X é reflexivo, então X é isométrico a X^{**}. Temos que $c_0^{**} \equiv \ell_\infty$. Logo, c_0 não é isométrico ao seu bidual, pois ℓ_∞ não é separável.

Exemplo 68. ℓ_1 não é reflexivo.
Veja que ℓ_1 é separável, mas $\ell_1^* \equiv \ell_\infty$ não é separável.

Exemplo 69. $\mathcal{C}[0,1]$ tem dual não separável. Seja $a \in [0,1]$ e considere

$$\begin{array}{rccl} \varphi_a & : \mathcal{C}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \varphi_a(f) = f(a) \end{array}$$

Veja que $\|\varphi_a - \varphi_b\| = 2$, para $a \neq b$. Logo, é possível construir um conjunto não enumerável de bolas disjuntas.

Observação 22. Existe um espaço de Banach J não reflexivo que é isométrico a J^{**}. Este espaço é conhecido como *Espaço de James*, e foi apresentado em 1951. Ele é definido como

$$J = \{(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ e } \sup_{n_1<\ldots n_k} \left\|(x_{n_2} - x_{n_1}, x_{n_3} - x_{n_2}, \ldots, x_{n_k} - x_{n_{k-1}})\right\|_2 < \infty\}$$

Temos que, considerando $\pi\colon J \to J^{**}$ a imersão canônica, $\pi(J)$ é um hiperplano de J^{**}.

Proposição 94. Seja X um espaço de Banach reflexivo. Então X é separável se e somente se X^{**} é separável.

Demonstração. Se X é reflexivo, então $X \equiv X^{**}$. Sendo X separável, então X^{**} é separável, o que implica X^* separável. ☐

Proposição 95. Sejam X e Y espaços normados. Se X é reflexivo e Y é isomorfo a X, então Y é reflexivo.

Demonstração. Seja $T\colon X \to Y$ um isomorfismo. Segue que

$$T^*\colon Y^* \to X^*$$

$$T^{**}\colon X^{**} \to Y^{**}$$

são isomorfismos. O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "T"] & X^{**} \arrow[d, "T^{**}"] \\ Y \arrow[r, "\pi_Y"] & Y^{**} \end{tikzcd}$$

ou seja, temos que $\pi_Y = T^{**}\pi_X T^{-1}$.

Como X é reflexivo, então π_X é sobrejetora. Como T^{**} e T^{-1} são isomorfismos, também são consequentemente sobrejetores. Logo, como a composta de funções sobrejetoras é sobrejetora, segue que $\pi_Y\colon Y \to Y^{**}$ é sobrejetora. Assim, Y é um espaço reflexivo. □

Proposição 96. Sejam X um espaço reflexivo e Y um subespaço fechado de X. Então Y é reflexivo.

Demonstração. Como Y é subespaço de X, podemos considerar a imersão canônica

$$\begin{array}{rccc} \iota & : & Y & \longrightarrow & X \\ & & y & \longmapsto & y \end{array}$$

A partir dela, podemos conceber o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_X"] & X^{**} \arrow[d, "\iota^{**}"] \\ Y \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\pi_Y"] & Y^{**} \end{tikzcd}$$

ou seja, $\pi_X \circ \iota = \iota^{**}\pi_Y$.

Seja $y^{**} \in Y^{**}$. Nossos objetivo é encontrar um $y \in Y$ tal que $y^{**} = \pi_Y(y)$.

Como $\iota^{**}(y^{**}) \in X^{**}$ e X é reflexivo, então existe um $x \in X$ tal que

$$\pi_X(x) = \iota^{**}(y^{**})$$

Vejamos que $x \in \iota(Y)$. Se $x \notin \iota(Y)$, como $\iota(Y)$ é fechado em X, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $x^* \in X^*$ tal que

- $x^*(x) \neq 0$
- $x^* \hookrightarrow_{\iota(Y)} = 0$, isto é, $x^*(\iota(y)) = 0$, para todo $y \in Y$.

Como $x^*(\iota(y)) = 0$, para todo $y \in Y$, então $\iota^* x^*(y) = 0$ para todo $y \in Y$. Como $\iota^* \circ x^* \in Y^*$, isso quer dizer que $\iota^* x^* = 0$. Assim,

$$(\iota^{**}(y^{**}))(x^*) = y^{**}(\iota^* \circ x^*) = y^{**}(0) = 0$$

Por outro lado,

$$(\iota^{**}(y^{**}))(x^*) = (\pi_X(x))(x^*) = x^*(x) \neq 0,$$

o que é uma contradição. Logo, $x \in \iota(Y)$.

Consideremos $y \in Y$ tal que $x = \iota(y)$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} \iota^{**}(y^{**}) & = & \pi_X(x) \\ & = & \pi_X(\iota(y)) \\ & = & \iota^{**}(\pi_Y(y)) \end{array}$$

Logo,

$$\iota^{**}(y^{**}) = \iota^{**}(\pi_Y(y)) \Rightarrow \iota^{**}(y^{**}) - \iota^{**}(\pi_Y(y)) = 0 \Rightarrow \iota^{**}(y^{**} - \pi_Y(y)) = 0$$

Para concluir, é suficiente ver que ι^{**} é injetora, pois isso implicará $y^{**} - \pi_Y(y) = 0$, acarretando o resultado desejado.

Vamos mostrar que $\text{Ker}(\iota^{**}) = \{0\}$. Para isso, lembremos que

$$\text{Ker}(\iota^{**}) = (\text{Im}(\iota^*))^{\perp}$$

Vamos verificar que $\text{Im}\,\iota^* = Y^*$.

Seja $f \in Y^*$, queremos mostrar que existe uma $\tilde{g} \in X^*$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, Rightarrow, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, dashed, "\tilde{g}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Consideremos

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \iota(Y) & \longrightarrow & K \\ & & \iota(y) & \longmapsto & f(y) \end{array}$$

Então g é linear e contínua. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{g} \in X^*$ tal que $\tilde{g}(\iota(y)) = f(y)$, para todo $y \in Y$.. Logo, $\iota^*(\tilde{g}) = f$. Portanto, ι^* é sobrejetora, o que implica $\text{Im}\,\iota^* = Y$. Assim:

$$\text{Ker}(\iota^{**}) = (\text{Im}(\iota^*))^{\perp} = (Y)^{\perp} = 0$$

Logo, ι^{**} é injetora. $\square$

Corolário 13. ℓ_∞ não é reflexivo.

Demonstração. ℓ_∞ contém c_0, que não é reflexivo. Logo, ℓ_∞ não é reflexivo. $\square$

Lema 4. Seja X espaço normado. Sejam

$$\pi\colon X \to X^{**}$$

e

$$\pi_*\colon X^* \to X^{***}$$

imersões canônicas. Então,

$$X^{***} = \pi_*(X^*) \oplus \pi(X)^\perp$$

Demonstração. Seja $x^{***} \in \pi_*(X^*) \cap \pi(X)^\perp$. Então, $x^{***} = \pi_*(x^*)$ para algum $x^* \in X^*$. Observe que $x^{***}(\pi(x)) = 0$ para todo $x \in X$. Assim

$$\begin{aligned} 0 &= x^{***}(\pi(x)) \\ &= \pi_*(x^*)(\pi(x)) \\ &= (\pi(x))(x^*) \\ &= x^*(x), \ \forall x \in X \end{aligned}$$

Assim, $x^* = 0$. Portanto,

$$x^{***} = \pi_*(x^*) = \pi_*(0) = 0$$

Logo,

$$\pi_*(X^*) \cap \pi(X)^\perp = \{0\}$$

Precisamos mostrar agora que todo elemento de X^{***} pode ser escrito como soma de elementos de $\pi_*(X^*)$ e $\pi(X)^\perp$. Seja $x^{***} \in X^{***}$. Consideremos $x^{***}\pi \in X^*$. De fato, veja que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, Rightarrow, "x^{***}"] \arrow[rr, bend right] & X^{**} \arrow[r, Rightarrow, "\pi"] & K \end{tikzcd}$$

Assim, $x^{***} = \pi_*(x^{***}\pi) + (x^{***} - \pi_*(x^{***}\pi))$. Vejamos que $x^{***} - \pi * (x^{***}\pi) \in \pi(X)^\perp$.

$$(\pi_*(x^{***}\pi))(\pi(x)) = (\pi(x))(x^{***}\pi) = x^{***}\pi(x) = x^{***}(\pi(x))$$

Logo,

$$(x^{***} - \pi_*(x^{***}(\pi)))(\pi(x)) = x^{***}(\pi(x)) - \pi_*(x^{***}(\pi))(\pi(x)) = x^{***}(\pi(x)) - x^{***}(\pi(x)) = 0$$

$\square$

Proposição 97. Seja X espaço de Banach. Então, X é reflexivo se e somente se X^* é reflexivo.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos X reflexivo. Então, $\pi(X) = X^{**}$. Do lema 4 anterior:

$$X^{***} = \pi_*(X^*) \oplus \pi(X)^{\perp} = \pi_*(X^*) \oplus (X^{**})^{\perp} = \pi_*(X^*) \oplus \{0\}$$

Portanto, $\pi_* \colon X^* \to X^{***}$ é sobrejetora e assim X^* é reflexivo. ($\Leftarrow$) Segue que X^{**} é reflexivo, Assim $X \equiv X^{**}$. Como X é isomorfo a um espaço reflexivo, segue que X é reflexivo. $\square$

Capítulo 8

Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado

8.1 Teorema de Baire

Definição 98. Um subconjunto de um espaço topológico é *magro* se está contido numa reunião enumerável de subconjuntos fechados de interior vazio.

Exemplo 70. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$, com a topologia usual. Temos que

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$$

e cada singleton $\{q_n\}$ claramente tem interior vazio.

Definição 99. Um espaço topológico é dito *de Baire* se todo subconjunto magro tem interior vazio.

Teorema 23 (Teorema de Baire)**.** Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.

Demonstração. □

Observação 23. Se X é um espaço normado e Y um subespaço vetorial próprio, então Y tem interior vazio. De fato, se Y contém uma bola $B(y_0; r)$, com $r > 0$,

$$Y \supseteq B(y_0; r) - \{y_0\} = B(0; r) \Rightarrow Y \supseteq X,$$

o que é um absurdo.

Observação 24. Se X é um espaço de Banach, com $X \neq \{0\}$, segue do Teorema de Baire 2 que X não pode ser escrito como uma reunião enumerável

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \quad \text{com } F_n \subseteq X \text{ fechado com interior vazio.}$$

8.2 Teorema de Banach Steinhaus: O Princípio da Limitação Uniforme

Definição 100. Sejam X e Y espaços normados e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}^c(X,Y)$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *pontualmente limitado* se, para todo $x \in X$, o conjunto

$$\{T(x) : T \in \mathcal{A}\}$$

é um subconjunto limitado em Y, ou seja:

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \big\|T(x)\big\| < \infty, \quad \forall x \in X$$

Observação 25. Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}^c(X,Y)$ é limitado, então é pontualmente limitado. De fato, seja M tal que

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\| \leq M < \infty$$

Para cada $x \in X$ e $T \in \mathcal{A}$, temos que

$$\big\|T(x)\big\| \leq \|T\|\|x\| \leq M\|x\|$$

Exemplo 71. Considere a família de operadores limitados

$$\mathcal{F} = Banana$$

Teorema 24 (Teorema de Banach-Steinhaus - Princípio da Limitação Uniforme)**.** Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}^c(X,Y)$. Então $\mathcal{A}$ é limitado se e somente se $\mathcal{A}$ é pontualmente limitado.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se $\mathcal{A}$ é limitado, considere M tal que

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\| \leq M < \infty$$

Para cada $x \in X$ e $T \in \mathcal{A}$, temos que

$$\big\|T(x)\big\| \leq \|T\|\|x\| \leq M\|x\|$$

Logo, $\big\|T(x)\big\|$ é limitado e $\mathcal{A}$ é pontualmente limitado.

$(\Leftarrow)$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$R_n = \{x \in X : \big\|T(x)\big\| \leq n\|x\|, \forall T \in \mathcal{A}\}$$

Pela continuidade de cada $T \in \mathcal{A}$, R_n é fechado em X.

Como $\mathcal{A}$ é pontualmente limitado, $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n$.

Assim, pelo Teorema de Baire 2, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que R_{n_0} tem interior não-vazio. Logo, existe uma bola contida em R_{n_0}.

Seja $x_0 \in X$ e $r > 0$ tais que $\overline{B(x_0; r)} \subseteq R_{n_0}$. Seja $T \in \mathcal{A}$ e $x \in B_X$. Então, $x_0 + rx \in \overline{B(x_0; r)} \subseteq R_{n_0}$. Então

$$\left\|T(x_0 + rx)\right\| \leq n_0 \|x_0 + rx\|.$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} \left\|T(x)\right\| & = & \left\|T\left(\frac{1}{r}(rx)\right)\right\| \\ & = & \left\|\frac{1}{r}T(rx)\right\| \\ & = & \frac{1}{r}\left\|T(rx)\right\| \\ & = & \frac{1}{r}\left\|T(x_0 + rx - x_0)\right\| \\ & = & \frac{1}{r}\left\|T(x_0 + rx) - T(x_0)\right\| \\ & \leq & \frac{1}{r}\left(\left\|T(x_0 + rx)\right\| + \left\|T(x_0)\right\|\right) \\ & \leq & \frac{1}{r}\left(n_0\|x_0 + rx\| + n_0\|x_0\|\right) \\ & \leq & \frac{1}{r}(2n_0\|x_0\| + r) \end{array}$$

Como $2n_0\|x_0\| + r$ independe de T e de x, temos que

$$\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T\| \leq 2n_0\|X_0\| + r$$

Portanto, a família $\mathcal{A}$ é limitado. □

Observação 26. O resultado não vale quando X não é um espaço de Banach. Como exemplo, considere $(c_{00}, \|\centerdot\|_\infty)$. Seja

$$\begin{array}{rrcl} T_n & : & c_{00} & \longrightarrow & c_{00} \\ & x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} & \longmapsto & T_n(x) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n, 0, 0, 0, \ldots) \end{array}$$

Observe que $T_n \in \mathcal{L}^c(c_{00}, c_{00})$ e $\|T_n\| = n$. A família $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é pontualmente limitada. Dado x de suporte finito, existe um n tal que o sup do vetor está contido.

Corolário 14. Sejam X espaço de Banach e $\mathcal{A}' \subseteq X^* = \mathcal{L}^c(X, K)$ tal que para todo $x \in X$,

$$\sup_{f \in \mathcal{A}'} \left|f(x)\right| < \infty$$

Então $\mathcal{A}'$ é limitado.

Corolário 15. Sejam E espaço normado e $F \subseteq E$ tal que $\forall f \in E^*$

$$\sup_{x \in F} \left|f(x)\right| < \infty$$

Então F é limitado.

Demonstração. Consideremos $\pi\colon F \to E^{**}$ a imersão canônica. Então

$$\sup_{x\in F}\left|f(x)\right| < \infty \to \sup_{x\in F}\left|(\pi(x))(f)\right| < \infty, \quad \forall f \in E^{**}.$$

Seja

$$\mathcal{A}' = \{\pi(x)|x \in F\}.$$

Assim, $\mathcal{A}'$ é pontualmente limitada. Pelo corolário anterior 14, $\mathcal{A}'$ é limitada.

Como $\left\|\pi(x)\right\| = \|x\|$, para todo $x \in E$, então F é limitado. □

Corolário 16 (Teorema de Banach-Steinhaus)**.** Seja X um espaço de Banach e Y um espaço normado. Seja (T_n) uma sequência de operadores em $\mathcal{L}^c(X,Y)$. Suponhamos que (T_n) converge pontualmente a uma função $T\colon X \to Y$. Então T é linear e contínua, e

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$$

Demonstração. Temos que $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ e cada T_n é linear. Seja

$$\mathcal{A} = \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Do fato de que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para cada $x \in X$, segue que $\mathcal{A}$ é pontualmente limitado. Pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe um $M \geq 0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq M.$$

Assim, para cada $x \in X$,

$$\left\|T(x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|T_n(x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|T_n(x)\right\| \leq M\|x\|$$

Portanto T é contínua. Logo, $T \in \mathcal{L}^c(X,Y)$.

Seja $(\left\|T_{n_k}\right\|)_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente de $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sabemos que o liminf é o menor dos limites das subsequências. Então:

$$\left\|T(x)\right\| = \lim_{k\to\infty} \left\|T_{n_k}(x)\right\| \leq \left(\lim_{k\to\infty} \left\|T_{n_k}\right\|\right) \|x\|$$

Portanto, $\|T\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$.

□

Podemos também demonstrar de forma alternativa o Teorema de Banach-Steinhaus, sem utilizar o Teorema de Baire.

Lema 5. Seja T um operador linear limitado de um espaço normado X a um espaço normado Y. Então para todo $x \in X$ e $r > 0$, temos:

$$\sup_{x' \in B(x,r)} \left\| T\left(x'\right) \right\| \geq \|T\| r$$

em que $B(x,r) = \{x' \in X : \left\|x' - x\right\| < r\}$.

Demonstração. Para $\xi \in X$ temos

$$\max\left\{\left\|T(x+\xi)\right\|, \left\|T(x-\xi)\right\|\right\} \geq \frac{1}{2}\left(\left\|T(x+\xi)\right\| + \left\|T(x-\xi)\right\|\right) \geq \left\|T(\xi)\right\|$$

em que a segunda $\geq$ usa a desigualdade triangular na forma $\|\alpha - \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$. Agora, tome o supremo sobre $\xi \in B(0,r)$. □

Teorema 25 (Teorema de Banach-Steinhaus)**.** Seja $\mathcal{F}$ uma família de operadores limitados de um espaço de Banach X a um espaço normado Y. Se $\mathcal{F}$ é pontualmente limitado (i.e., $\sup_{T \in \mathcal{F}} \left\|T(x)\right\| < \infty$ para todo $x \in X$), então $\mathcal{F}$ é uniformemente limitado (i.e., $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$).

Demonstração. Suponha que $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| = \infty$, e escolha $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{F}$ tal que $\|T_n\| \geq 4^n$. Então seja $x_0 = 0$, e para $n \geq 1$ use o lema para escolher indutivamente um $x_n \in X$ tal que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 3^n$ e $\left\|T_n(x_n)\right\| \geq \frac{2}{3} 3^n \|T_n\|$. A sequência (x_n) é Cauchy, logo convergente a algum $x \in X$; e é fácil ver que $\|x - x_n\| \leq \frac{1}{2} 3^n$ e aí $\left\|T_n(x)\right\| \geq \frac{1}{6} 3^n \|T_n\| \geq \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$. □

8.3 Teorema da Aplicação Aberta

Vamos demonstrar um importante teorema sobre operadores contínuos entre espaços de Banach, o chamado Teorema da Aplicação Aberta. Como bem sabemos, funções contínuas entre espaços topológicos têm (por definição) a propriedade que as imagens inversas de conjuntos abertos são também abertos. O que o Teorema da Aplicação Aberta nos diz é que, para operadores lineares contínuos e sobrejetores agindo entre espaços de Banach, vale também a recíproca: as imagens de abertos são também abertos.

Proposição 98. Sejam X e Y espaços normados e $T\colon X \to Y$ linear e aberta, então T é sobrejetora.

Demonstração. Veja que

$$T(X) \supseteq B(y_0; r) \Rightarrow T(X) \supseteq B(y_0; r) - \{y_0\} = B(0; r) \Rightarrow T(X) = Y.$$

□

Lema 6. Sejam X espaço de Banach, Y um espaço normado, $r > 0$ e $T \in \mathcal{L}^c(X,Y)$. Então

$$B_Y(0; r) \subseteq \overline{T(B_X(0; 1))} \Leftrightarrow B_Y(0; r) \subseteq T(B_X(0; 1))$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Tomando $\frac{1}{r}T$ ao invés de T, podemos considerar a bola unitária sem perda de generalidade. Suponhamos que

$$B_Y(0;1) \subseteq \overline{T(B_X(0;1))}$$

Vamos construir uma sequência de vetores por indução.

Seja $z_0 \in B_Y(0;1)$ e $\rho \in (0,1)$ tal que $z_0 \in B_Y(0,1)$.

Por hipótese, $B_Y(0;\rho) \subseteq \overline{T(B_X(0;\rho))}$. Dado $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$). Podemos escrever

$$z_0 = T(x_0) + \omega_0$$

$x_0 \in B)X(0;\rho)$ e $\|\omega_0\| < \varepsilon$. Como $\omega_0 \in B_Y(0;\varepsilon)$ e $B_Y(0;\varepsilon) \subseteq \overline{T(B_X(0;\varepsilon))}$.

Pelo mesmo argumento, podemos escrever

$$\omega_0 = T(x_1) + \omega_1,$$

onde $x_1 \in B(0;\varepsilon)$ e $\|\omega_1\| < \varepsilon^2$. Assim, $\omega_1 \in B_Y(0;\varepsilon^2)$. Como $B_Y(0;\varepsilon^2) \subseteq \overline{T(B_X(0;\varepsilon^2))}$. Então podemos escrever

$$\omega_1 = T(x_2) + \omega_2,$$

onde $x_2 \in B(0;\varepsilon^3)$e $\|\omega_2\| < \varepsilon^3$. Por indução, podemos encontrar

$$\omega_n = T(x_{n+1}) + \omega_{n+1},$$

onde $x_{n+1} \in B(0;\varepsilon^{n+1})$ e $\|\omega_{n+1}\| < \varepsilon^{n+1}$.

Então

$$\begin{aligned}
z_0 &= T(x_0) + \omega_0 \\
&= T(x_0) + T(x_1) + \omega_1 \\
&= T(x_0) + T(x_1) + T(x_2) + \omega_2 \\
&= T(x_0) + T(x_1) + T(x_2) + T(x_3) + \omega_3 \\
&\vdots \quad \vdots \\
&= T(x_0) + T(x_1) + \ldots + T(x_n) + \omega_n
\end{aligned}$$

onde $\|x_i\| < \varepsilon^i$ e $\|\omega_n\| < \varepsilon^{n+1}$. Desse modo,

$$z_0 = T(x_0 + x_1 + \ldots x_n) + \omega_n$$

Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_i$ é absolutamente convergente. Como X é de Banach, seja $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

Tomando o limite para n ao infinito, temos:

$$\lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) + \omega_i = T(x) \Rightarrow z_0 = T(x)$$

Além disso,

$$\|x\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| =$$

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots =$$

$$\rho + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots =$$

$$\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n =$$

$$\rho + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1$$

□

Vamos agora enunciar o teorema da aplicação aberta:

Teorema 26 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T\colon X \to Y$ um operador linear limitado sobrejetivo. Então T é uma aplicação aberta.

Vamos demonstrá-lo como parte da proposição abaixo:

Proposição 99. Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}^c(X,Y)$. Então são equivalentes:

(i) T é sobrejetora;

(ii) T é aberta;

(iii) $\exists r > 0$ tal que $B_Y(0;r) \subseteq T(B_X(0;1))$;

(iv) $\exists r > 0$ tal que $B_Y(0;r) \subseteq \overline{T(B_X(0;1))}$.

Demonstração. **(iv)** $\Rightarrow$ **(iii)**: Segue diretamente do lema 6.

(iii) $\Rightarrow$ **(ii)**: Válida para X e Y normados. Seja $U \subseteq X$ aberto e seja $y \in T(U)$. Vamos mostrar que T leva bola aberta em bola aberta. Seja $y = T(U)$, e $\delta > 0$ tal que $B(x;\delta) \subseteq U$. Temos que

$$\begin{aligned} B_Y(y;\delta r) &= B_Y(T(x);\delta r) \\ &= \{T(x)\} + \delta B_Y(0;r) \\ &\subseteq \{T(x)\} + \delta T(B(0;1)) \\ &= \{T(x)\} + T(B(0;\delta)) \\ &= T(B(x,\delta)) \end{aligned}$$

Portanto, $T(U) \supseteq B(y,\delta r)$. Assim, $T(U)$ é aberto. Logo, T é aberta.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)**: Segue diretamente da proposição 98.

(i) $\Rightarrow$ **(iv)**: Seja $G = T(B(0;1))$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, $nG = T(B(0;n))$. Como T é sobrejetora,

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nG = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{nG}$$

Como Y é um espaço de Banach, então pelo Teorema de Baire, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overset{\circ}{\overline{n_0 G}} \neq \emptyset \Rightarrow \overset{\circ}{\overline{G}} \neq \emptyset$.

Seja $r > 0$ e $y_0 \in Y$ tal que $B_Y(y;r) \subseteq \overline{G}$. Observemos que se $g \in G$, então $-g \in G$. O mesmo acontece com $\overline{G}$. Então, $B(-y_0;r) \subseteq \overline{G}$.

Como G é convexo, então $\overline{G}$ também é convexo. Assim:

$$\begin{aligned} B(0;r) &\subseteq \tfrac{1}{2}\left(B(-y_0;r) + B(y_0;r)\right) \\ &\subseteq \tfrac{1}{2}\left(\overline{G} + \overline{G}\right) \\ &\subseteq \overline{G} \qquad\qquad \text{(pela convexidade de } \overline{G}) \end{aligned}$$

Portanto, $B(0;r) \subseteq \overline{T(B(0;1))}$. □

Exemplo 72. Para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$, defina:

$$\begin{aligned} T \ : \ \ell_2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto T(x) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Sejam $x = x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda \in K$. Vejamos que T é linear.

$$T(x+\lambda y) = (x_{n+1} + \lambda y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + \lambda (y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = T(x) + \lambda T(y).$$

E também temos:

$$\|T(x)\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

pois apenas estamos acrescentando o termo x_0^2 na soma. Assim T é limitado e $\|T\| \leq 1$. Para ver que a igualdade ocorre basta considerar $x = (0,1,0,\ldots) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Claramente temos $\|x\|_2 = 1, T(x) = (1,0,0,\ldots)$ e por fim $\|T\|_2 = 1$. Assim $\|T\| = 1$.

Além disso, T é sobrejetora. De fato, dado $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$, para $\xi \in \mathbb{N}$ temos que $T(\xi, x_0, x_1, x_2, \ldots) = x$.

Assim, como T é uma aplicação linear limitada e sobrejetora, o Teorema da Aplicação Aberta garante que T é aberta.

Teorema 27. Sejam X e Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ linear. Então T é bijetora e contínua.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Óbvio. ($\Leftarrow$) Seja $T \in \mathcal{L}^c(X,Y)$. Então, o Teorema da Aplicação Aberta garante que T é aberta. Assim, T^{-1} □

8.4 Teorema do Gráfico Fechado

O Teorema do Gráfico Fechado é um dos resultados fundamentais da análise funcional. Ele estabelece uma relação entre a continuidade de um operador linear e o fato de seu gráfico ser fechado.

Definição 101. Sejam X e Y espaços normados, e $f\colon X \to Y$. Dizemos que o *gráfico* de f é o conjunto

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

Observe que, se f é contínua, então $\mathcal{G}(f)$ é fechado na topologia produto. Além disso, temos que

$$\begin{array}{rcrcl} g & : & X \oplus Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \left\| y - f(x) \right\| \end{array}$$

Veja que g é contínua. Podemos escrever então

$$\mathcal{G}(f) = g^{-1}(\{0\})$$

Teorema 28 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** Sejam X e Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ linear. Se o gráfico de T é fechado, então T é contínua.

Demonstração. Usemos em $X \oplus Y$ a norma

$$\left\| (x, y) \right\|_1 = \|x\| + \|y\|$$

Sejam

$$\begin{array}{rcrcl} p_X & : & X \oplus Y & \longrightarrow & X \\ & & (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} p_Y & : & X \oplus Y & \longrightarrow & Y \\ & & (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

p_X e p_Y são lineares e contínuas.

Seja $\mathcal{G} = \mathcal{G}(T)$. $\mathcal{G}$ é um subconjunto fechado em $X \oplus Y$ por hipótese. Consideremos

$$\begin{array}{rcrcl} V & : & \mathcal{G} & \longrightarrow & X \\ & & (x, T(x)) & \longmapsto & x \end{array}$$

Veja que $V = p_X \restriction_{\mathcal{G}}$. V é bijetora e contínua. $\mathcal{G}$ é um espaço de Banach, pois é subconjunto fechado de $X \oplus Y$, que é de Banach pois X e Y são espaços de Banach por hipótese.

Segue como consequência do Teorema da Aplicação Aberta que V^{-1} é contínua. Note que temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "V^{-1}"'] & Y \\ X \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

Logo, $T = p_Y \circ V^{-1}$. Assim, T é contínua, pois é composta de duas funções contínuas. □

Vamos ver agora algumas aplicações.

8.4.1 Séries de Fourier

Seja X o espaço normado das funções contínuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de período 2π, ou seja, com

$$f(t+2\pi) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

com

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,2\pi]} \big|f(t)\big|$$

Consideremos

$$\begin{array}{rcccl} T & : & X & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,2\pi]) \\ & & f & \longmapsto & T(f) = f\restriction_{[0,2\pi]} \end{array}$$

T é uma imersão isométrica, pois claramente $\big\|T(f)\big\|_\infty = \|f\|$. Temos também que

$$\mathrm{Im}(T) = \{g \in \mathcal{C}([0,2\pi]) : g(0) = g(2\pi)\}$$

é um hiperplano fechado de $\mathcal{C}([0,2\pi])$. Seja $\varphi \in \mathcal{C}([0,2\pi])^*$ definida por $\varphi(f) = f(2\pi) - f(0)$. Logo, $T(X) = \mathrm{Ker}\varphi$. Como T é uma imersão isométrica (pois X e $T(X)$ são isométricos) então X é de Banach.

Definição 102. Uma *Série de Fourier* de uma função periódica $f\colon [-L,L] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ é uma série infinita da forma

$$SF(f)(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}(nt)$$

Cada um dos valores c_0, a_n, b_n podem ser univocamente determinados, como mostra a

Proposição 100. Os valores c_0, a_n, b_n são conhecidos como *coeficientes de Fourier*, e são dados por

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x$$

e, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x$$

Demonstração. É fácil ver que $c_0 = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x$. Para encontrar os valores da sequência $(a_n)_{n\geq 0}$, vamos utilizar que, para $j,k \in \mathbb{N}$:[1]

$$\int\limits_{-L}^{L} \cos(jx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-L}^{L} \cos(jx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = L\delta_{jk}$$

e

$$\int\limits_{-L}^{L} \operatorname{sen}(jx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0$$

onde δ_{jk} representa o *Delta de Kronecker.*

Observe que

$$\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-L}^{L}\left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}(nx)\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x =$$

$$c_0\int\limits_{-L}^{L}\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\int\limits_{-L}^{L}\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}(nx)\int\limits_{-L}^{L}\cos(kx)\,\mathrm{d}x =$$

$$c_0\int\limits_{-L}^{L}\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int\limits_{-L}^{L}\cos(nx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{=La_k} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int\limits_{-L}^{L}\operatorname{sen}(nx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{=0} \Rightarrow$$

$$\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = La_k \Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x}$$

Analogamente, segue o resultado para b_n. □

Como exemplo motivador, vamos estudar a Série de Fourier de um sinal periódico digital, que é descrita pela função

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}((2n+1)\omega_o t)}{2n+1}\right) \tag{8.1}$$

[1] Estas relações são chamadas de *relações de ortogonalidade*, por sua ligação com o produto interno definido no intervalo $[a,b]$ por $\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

onde $\omega_0 = 2\pi f_0$, para $f_0 = 100 \cdot 8 = 800$ Hz, ou seja, $\omega_0 = 1600\pi$ rad/s.

Esta função é um caso particular da conhecida **Square Wave Series** $\sqcap\!\sqcup(x)$, dada por

$$\sqcap\!\sqcup(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + \frac{\operatorname{sen}(7x)}{7} + \dots$$

8.4.2 Análise gráfica

Vamos agora estudar o gráfico de $f(t)$ para observar como esta se comporta.

Primeiramente, pode-se notar que

$$f(t) = \frac{1}{2} + \lim_{k\to\infty} \frac{2}{\pi} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{\operatorname{sen}(1600(2n+1)\pi t)}{2n+1} \right),$$

o que torna interessante observar os gráficos dos primeiros termos da sequência de funções $(f_k)_{k\geq 0}$, onde $f_k(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sum\limits_{n=0}^{k} \frac{\operatorname{sen}(1600(2n+1)\pi t)}{2n+1} \right)$ Abaixo, temos os gráficos de $f_0(t), f_1(t), f_2(t)$ e $f_4(t)$:

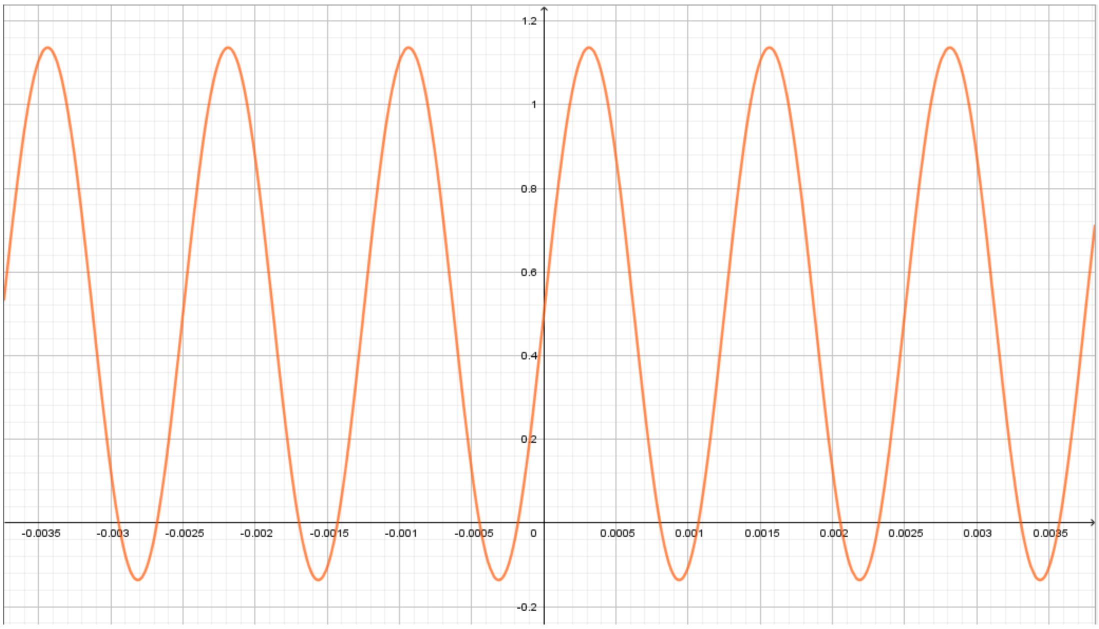


Figura 8.1: Gráfico de $f_0(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\mathrm{sen}(1600\pi t)\right)$

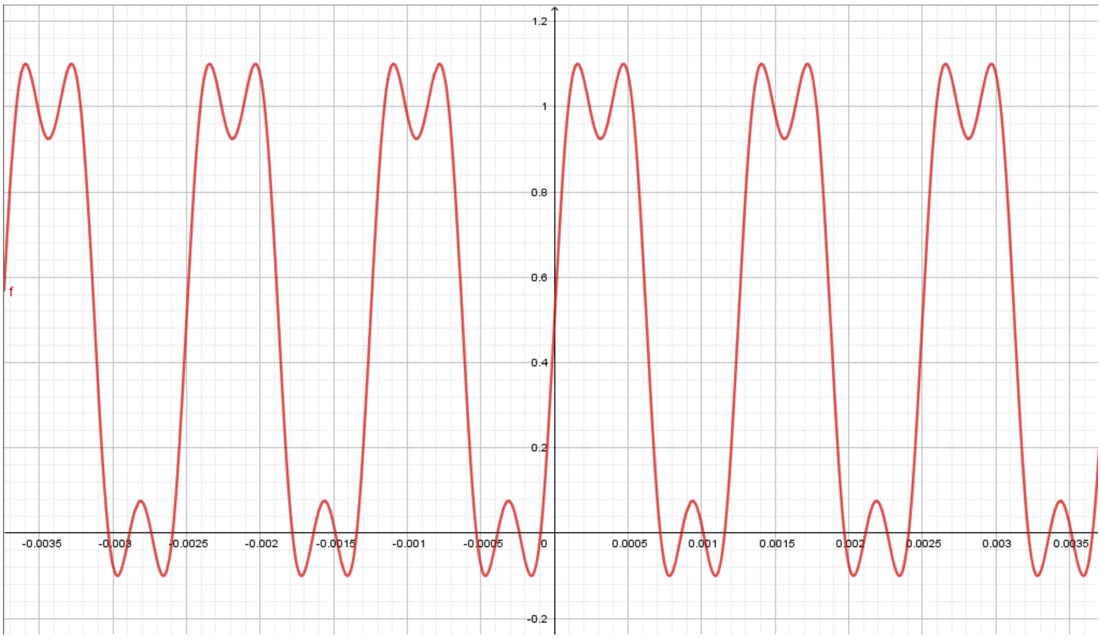


Figura 8.2: Gráfico de $f_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\text{sen}(1600\pi t) + \frac{\text{sen}(3{*}1600\pi t)}{3}\right)$

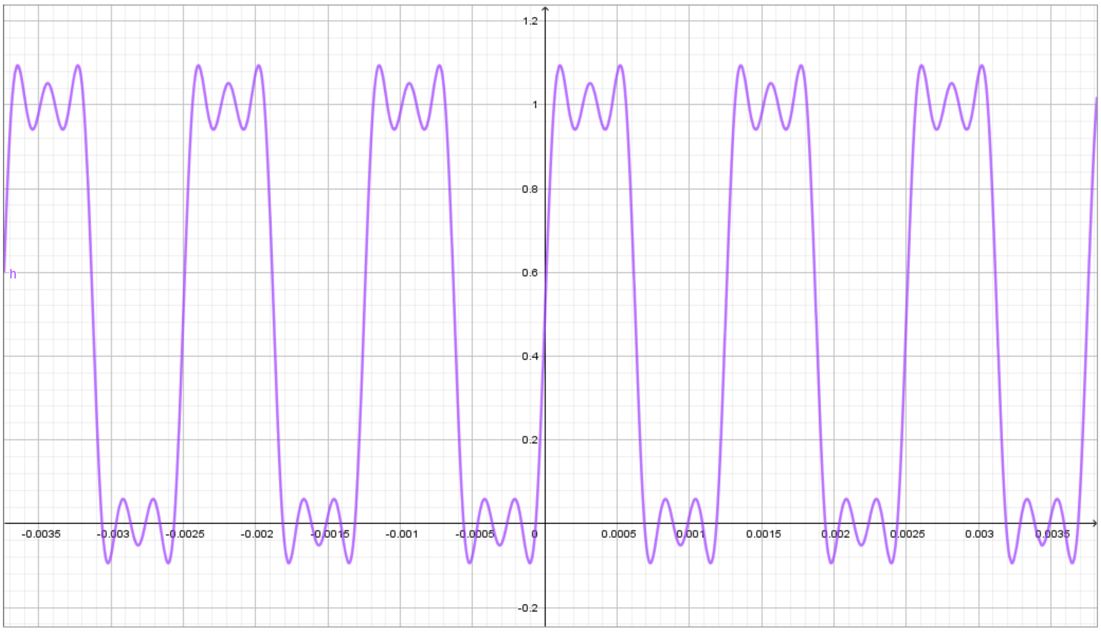


Figura 8.3: Gráfico de $f_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\text{sen}(1600\pi t) + \frac{\text{sen}(3{*}1600\pi t)}{3} + \frac{\text{sen}(5{*}1600\pi t)}{5}\right)$

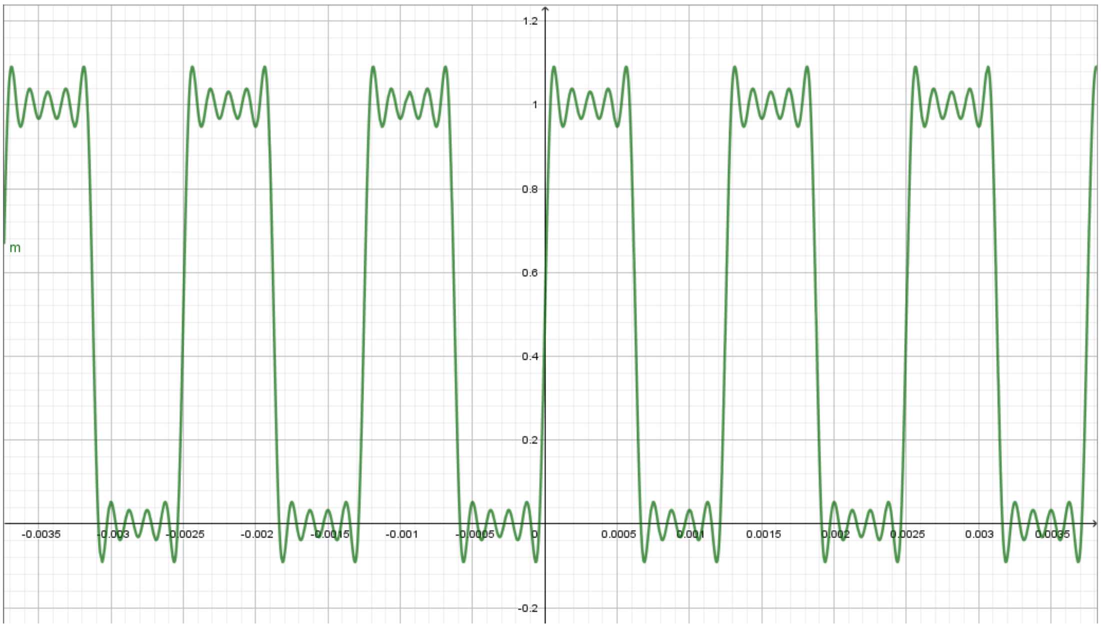


Figura 8.4: Gráfico de $f_4(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sum\limits_{n=0}^{4} \frac{\operatorname{sen}(1600(2n+1)\pi t)}{2n+1}\right)$

Continuando a plotar os gráficos, veremos que estes tendem a formar padrões constantes, alternando posições em que a função vale 0 ou 1.

De fato, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$, onde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in \bigcup\limits_{\ell=-\infty}^{\infty} \left]\frac{2\ell\pi}{\omega_0}, \frac{(2\ell+1)\pi}{\omega_0}\right] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{8.2}$$

Em suma, a função 8.2 é uma função alternante, que vale 1 numa união infinita de intervalos:

$$\ldots \cup \left]-\frac{4\pi}{\omega_0}, -\frac{3\pi}{\omega_0}\right] \cup \left]-\frac{2\pi}{\omega_0}, -\frac{\pi}{\omega_0}\right] \cup \left]0, \frac{\pi}{\omega_0}\right] \cup \left]\frac{2\pi}{\omega_0}, \frac{3\pi}{\omega_0}\right] \cup \ldots$$

e 0 nos demais pontos. No nosso caso, a função 8.1 vale 1 na união infinita de intervalos:

$$\ldots \cup \left]-\frac{1}{400}, -\frac{3}{1600}\right] \cup \left]-\frac{1}{800}, -\frac{1}{1600}\right] \cup \left]0, \frac{1}{1600}\right] \cup \left]\frac{1}{800}, \frac{3}{1600}\right] \cup \ldots$$

Dessa forma, temos na verdade que

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\omega_o t)}{2n+1}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in \bigcup\limits_{\ell=-\infty}^{\infty} \left]\frac{2\ell\pi}{\omega_0}, \frac{(2\ell+1)\pi}{\omega_0}\right] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A figura 8.5 mostra o gráfico do sinal digital original que é representado pela equação 8.1:

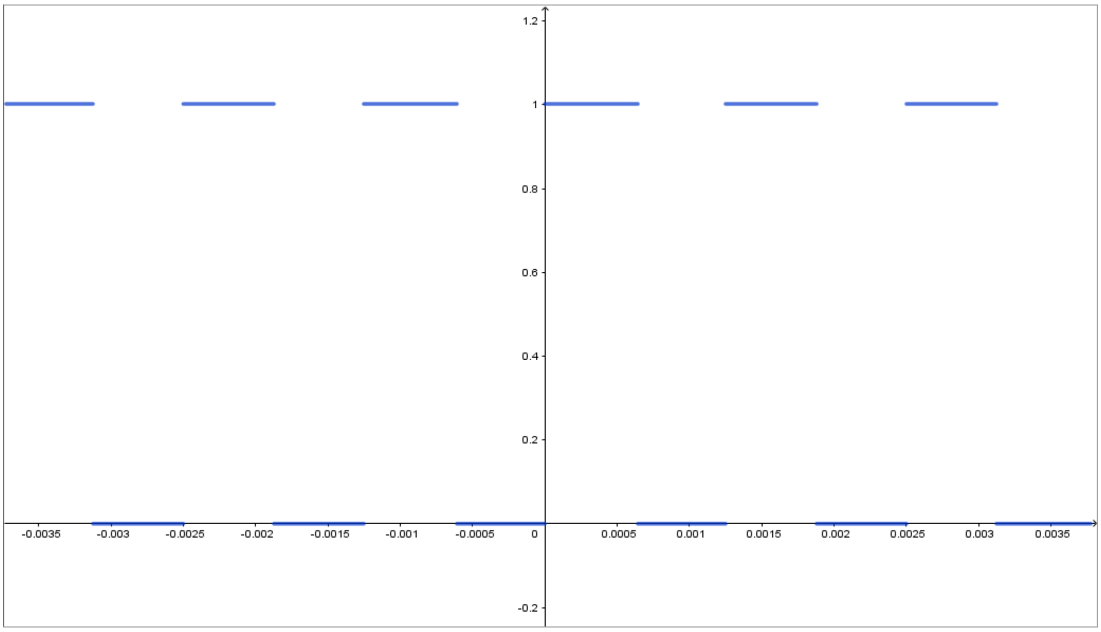


Figura 8.5: Gráfico de $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n+1)\omega_o t)}{2n+1}\right)$

Alguns exemplos clássicos de séries de Fourier são a **triangle wave** $\Lambda(x)$, a **sawtooth wave** $N(x)$ e a já citada **square wave** $\sqcap\!\sqcup\,(x)$:

$$\Lambda(x) = \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \frac{\cos(7x)}{7^2} + \frac{\cos(9x)}{9^2} + \dots$$
$$N(x) = \text{sen}(x) + \frac{\text{sen}(2x)}{2} + \frac{\text{sen}(3x)}{3} + \frac{\text{sen}(4x)}{4} + \frac{\text{sen}(5x)}{5} + \dots$$
$$\sqcap\!\sqcup\,(x) = \text{sen}(x) + \frac{\text{sen}(3x)}{3} + \frac{\text{sen}(5x)}{5} + \frac{\text{sen}(7x)}{7} + \frac{\text{sen}(9x)}{9} + \dots$$

Vamos retornar à nossa série 8.1 e verificar que ela é de fato a série de Fourier de 8.2:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in \bigcup\limits_{\ell=-\infty}^{\infty} \left]\frac{2\ell\pi}{\omega_0}, \frac{(2\ell+1)\pi}{\omega_0}\right] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{8.3}$$

Como visto, esta função admite uma série de Fourier[2] da forma

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\omega_0 t)$$

[2]Não entraremos em questões sobre condições para existência da série de Fourier de uma dada função

Pelo que sabemos de 100, temos que:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}} 1\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}}^{\frac{(2-\omega_0)\pi}{\omega_0}} 1\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{\frac{(\omega_0-1)\pi}{\omega_0}}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x\right)}_{\omega_0 \text{ vezes}} =$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi}\left(\left(\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}+\pi\right)+\left(\frac{(2-\omega_0)\pi}{\omega_0}-\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}\right)+\ldots+\left(\pi-\frac{(\omega_0-1)\pi}{\omega_0}\right)\right)=$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{\omega_0}=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{c_0=\frac{1}{2}}$$

Usando que $\int_a^b \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{sen}(bk)-\mathrm{sen}(ak)}{k}$, temos $a_n =$

$$\frac{1}{\pi}\underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}} 1\cdot\cos(n\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}}^{\frac{(2-\omega_0)\pi}{\omega_0}} 1\cdot\cos(n\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{\frac{(\omega_0-1)\pi}{\omega_0}}^{\pi} 1\cdot\cos(n\omega_0 x)\,\mathrm{d}x\right)}_{\omega_0 \text{ vezes}} =$$

$$\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}n\omega_0\right)-\mathrm{sen}\left(-\pi n\omega_0\right)}{n\omega_0}+\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{(2-\omega_0)\pi}{\omega_0}n\omega_0\right)-\mathrm{sen}\left(\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}n\omega_0\right)}{n\omega_0}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{sen}\left(\pi n\omega_0\right)-\mathrm{sen}\left(\frac{(\omega_0-1)\pi}{\omega_0}n\omega_0\right)}{n\omega_0}\right)=\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\cancel{\mathrm{sen}\left(n(1-\omega_0)\pi\right)}+\mathrm{sen}\left(\pi n\omega_0\right)}{n\omega_0}+\right.$$

$$\left.\frac{\cancel{\mathrm{sen}\left(n(2-\omega_0)\pi\right)}-\cancel{\mathrm{sen}\left(n(1-\omega_0)\pi\right)}}{n\omega_0}+\ldots+\frac{\mathrm{sen}\left(\pi n\omega_0\right)-\cancel{\mathrm{sen}\left(n(\omega_0-1)\pi\right)}}{n\omega_0}\right)=$$

$$\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}(\pi n\omega_0)+\mathrm{sen}(\pi n\omega_0)}{n\omega_0}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\mathrm{sen}(\pi n\omega_0)\right)\Rightarrow\boxed{a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\mathrm{sen}(\pi n\omega_0)\right)}$$

Analogamente ao feito acima, usando que $\int\limits_a^b \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(bk)-\cos(ak)}{k}$, temos $b_n =$

$$\frac{1}{\pi}\underbrace{\left(\int\limits_{-\pi}^{\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}} 1\cdot \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}}^{\frac{(2-\omega_0)\pi}{\omega_0}} 1\cdot \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_{\frac{(\omega_0-1)\pi}{\omega_0}}^{\pi} 1\cdot \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\,\mathrm{d}x\right)}_{\omega_0 \text{ vezes}} =$$

$$\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\cos\left(\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}n\omega_0\right) - \cos\left(-\pi n\omega_0\right)}{n\omega_0} + \frac{\cos\left(\frac{(2-\omega_0)\pi}{\omega_0}n\omega_0\right) - \cos\left(\frac{(1-\omega_0)\pi}{\omega_0}n\omega_0\right)}{n\omega_0} + \ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\left(\pi n\omega_0\right) - \cos\left(\frac{(\omega_0-1)\pi}{\omega_0}n\omega_0\right)}{n\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\cancel{\cos\left(n(1-\omega_0)\pi\right)} - \cos\left(-\pi n\omega_0\right)}{n\omega_0}+\right.$$

$$\left.\frac{\cancel{\cos\left(n(2-\omega_0)\pi\right)} - \cancel{\cos\left(n(1-\omega_0)\pi\right)}}{n\omega_0} + \ldots + \frac{\cos\left(\pi n\omega_0\right) - \cancel{\cos\left(n(\omega_0-1)\pi\right)}}{n\omega_0}\right) =$$

$$\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\cos(\pi n\omega_0) - \cos(\pi n\omega_0)}{n\omega_0}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{b_n = 0}$$

Utilizando os coeficientes de Fourier encontrados, temos que

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) =$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\operatorname{sen}(\pi n\omega_0)\right)\cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \operatorname{sen}(n\omega_0 t) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}(\pi n\omega_0)\cos(n\omega_0 t)\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\operatorname{sen}(2\pi n\omega_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2k+1)\omega_0 t)}{2k+1},$$

que é exatamente a série 8.1.

Existem funções contínuas tais que sua série de Fourier diverge em 0.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\varphi_n \in X^*$,

$$\varphi_n(f) = SF_n(f)(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos(mt)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right)$$

Veja que

$$\left|\varphi_n(f)\right| \leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right|\mathrm{d}t$$

Vamos denominar

$$K_n(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Temos que φ_n é contínua, e

$$\|\varphi_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|K_n(t)\right|\mathrm{d}t$$

Vejamos que $\|\varphi_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|K_n(t)\right|\mathrm{d}t$.

Seja

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } K_n(t) \geq 0 \\ -1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Veja que g não é contínua, mas para todo $\varepsilon > 0$, existe uma f tal que

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(f(t)-g(t))K_n(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(f(t)-g(t))K_n(t)\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)K_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} g(t)K_n(t)\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)K_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left|K_n(t)\right|\mathrm{d}t\right| =$$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) K_n(t) \, \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| K_n(t) \right| \mathrm{d}t \right| =$$

$$\left| \varphi_n(f) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| K_n(t) \right| \mathrm{d}t \right| < \varepsilon$$

Como $\|f\| = 1$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue

$$\|\varphi_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| K_n(t) \right| \mathrm{d}t$$

Vejamos que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitado.

$$\|\varphi_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2} \right)} \right| \mathrm{d}t$$

Usando que $\left| \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2} \right) \right| \leq \frac{t}{2}$, para $t \in [0, 2\pi]$, e chamando $u = \left(n + \frac{1}{2} \right) t$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n\| &> \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{sen}\left(\left(n + \tfrac{1}{2} \right) t \right) \right| \mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{(2k+1)\pi} \tfrac{\left| \operatorname{sen}(u) \right|}{u} \, \mathrm{d}u \\
&= \tfrac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \tfrac{\left| \operatorname{sen}(u) \right|}{u} \, \mathrm{d}u \\
&\geq \tfrac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \tfrac{1}{(k+1)u} \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{sen}(u) \right| \mathrm{d}u \\
&= \tfrac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \tfrac{1}{k+1} \\
&= \tfrac{2}{\pi^2} H_n
\end{aligned}$$

E tomando o limite, temos

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n\| > \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\pi^2} H_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \|\varphi_n\| = \infty$$

Como X é de Banach, segue do Princípio da Limitação Uniforme que $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é pontualmente limitada.

Portanto, existe $f \in X$ tal que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitado, o que implica que $SF(f)$ é divergnete em 0.

Teorema 29 (Banach-Mazur)**.** Seja X um espaço de Banach separável. Então existe um subespaço fechado M_X de ℓ_1 tal que

$$X \cong \ell_1/M_X$$

Demonstração. É suficiente mostrar que $\exists T \in \mathcal{L}^c(\ell_1, X)$ sobrejetora, pois nesse caso, $X \cong \ell_1/\mathrm{Ker}T$.

Seja $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso em B_X. Dado $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

é absolutamente convergente em X. Sendo X de Banach, então é convergente. Consideremos

$$\begin{array}{rccl} T \ : & \ell_1 & \longrightarrow & X \\ & a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \end{array}$$

Claramente T é linear, e

$$\|T(a)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_1,$$

o que mostra que T é contínua. Para ver que T é sobrejetora, mostremos que $B_X \in T(\ell_1)$. Usaremos o seguinte lema, que estabelece uma espécie de "representação binária"para os elementos de B_X:

Lema 7. Para cada $x \in B_X$, existe uma sequência $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{j\geq 1} 2^{1-j} x_{n_j}$$

Demonstração. Seja $x \in B_X$. Tome $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - x_{n_1}\| < \frac{1}{2}$$

Seja $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$, tal que

$$\|2(x - x_{n_1} - x_{n_2})\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left\|x - x_{n_1} - 2^{-1} x_{n_2}\right\| < \frac{1}{4}$$

Seja $n_3 > n_2$ tal que

$$\left\|4(x - x_{n_1} - 2^{-1} x_{n_2} - x_{n_3})\right\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left\|x - x_{n_1} - 2^{-1} x_{n_2} - 2^{-2} x_{n_3}\right\| < \frac{1}{8}$$

Indutivamente, obtemos $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$\begin{aligned} & \left\| 2^{k-1}(x - x_{n_1} - 2^{-1}x_{n_2} - \ldots - 2^{2-k}x_{n_{k-1}} - x_{n_k}) \right\| && < \tfrac{1}{2} \\ \Rightarrow & \left\| x - x_{n_1} - 2^{-1}x_{n_2} - 2^{-2}x_{n_3} - \ldots - 2^{1-k}x_{n_k} \right\| && < \tfrac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Tomando o limite, obtemos uma sequência $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{j\geq 1} 2^{1-j}x_{n_j}$. □

Se $x \in B_X$, $x = T(a)$, onde $a_{n_j} = 2^{1-j}$ e $a_k = 0$ para todo $k \neq n_j$. Logo, T é sobrejetora. □

Teorema 30. Sejam X espaço de Banach e Y, Z subespaços fechados de X tais que $Y \cap Z = \{0\}$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) $Y + Z$ é fechado;

(ii) A aplicação canônica
$$T\colon Y \oplus_1 Z \to Y + Z$$
é um isomorfismo;

(iii) $\inf\{\|y - z\| : y \in S_y, z \in S_z\} > 0$;

(iv) As projeções
$$\begin{array}{rcccc} P_Y & : & Y + Z & \longrightarrow & Y \\ & & y + z & \longmapsto & y \end{array}$$
e
$$\begin{array}{rcccc} P_Z & : & Y + Z & \longrightarrow & Z \\ & & y + z & \longmapsto & z \end{array}$$
são contínuas.

Demonstração. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** : Seja

$$\begin{array}{rcccc} T & : & Y \oplus Z & \longrightarrow & Y + Z \\ & & (y, z) & \longmapsto & y + z \end{array}$$

Veja que T é bijetora e contínua. Além disso,

$$\left\| T(y, z) \right\| = \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\| = \left\| (y, z) \right\|_1$$

Por hipótese, $Y + Z$ é fechado, e portanto de Banach. $Y \oplus Z$ é de Banach. Então, como consequência do Teorema da Aplicação Aberta 26, temos que T é isomorfismo.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** : Como T é isomorfismo, existe $c > 0$ tal que

$$c\left\| (y, z) \right\|_1 \leq \left\| T(y, z) \right\| \forall y \in Y, \forall z \in Z$$

Sejam $y \in S_Y$ e $z \in S_Z$. Então

$$\begin{aligned} \|y-z\| &= \|T(y-z)\| \\ &\geq c(\|y-z\|_1) \\ &= (\|y\|+\|z\|) \\ &= 2c \end{aligned}$$

Portanto,

$$\inf \|y-z\| \geq 2c > 0.$$

(iii) ⇒ (iv) : Seja

$$c = \inf\{\|y-z\| : y \in S_y, z \in S_z\} > 0.$$

Suponha $\|y\| = 1$, e $z \in Z$. Temos dois casos a analisar:

- **Caso 1:** $\|z\| < 1 - \frac{c}{2}$ ou $\|z\| > 1 + \frac{c}{2}$.
  Então:
  $$\|y+z\| \geq \big|\|y\| - \|z\|\big| = \big|1 - \|z\|\big| > \left|1 - \left(1 - \frac{c}{2}\right)\right| = \frac{c}{2} = \frac{c}{2}\|y\|$$
  Logo,
  $$\|y\| = \|P_Y(y+z)\| \leq \frac{2}{c}\|y+z\|$$
- **Caso 2:** $1 - \frac{c}{2} \leq \|z\| \leq 1 + \frac{c}{2}$ Então:
  $$\|y+z\| = \left\|y + \frac{z}{\|z\|} - \frac{z}{\|z\|} + z\right\| \geq \left\|y + \frac{z}{\|z\|}\right\| - \left\|z - \frac{z}{\|z\|}\right\| \geq c - \|z\|\left\|1 - \frac{1}{\|z\|}\right\| =$$
  $$c - \|z\|\left\|\frac{\|z\|-1}{\|z\|}\right\| = c - \frac{\|z\|}{\|z\|}\big\|\|z\|-1\big\| = c - \big|\|z\|-1\big| =$$
  $$c - \big|1 - \|z\|\big| \geq c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} = \frac{c}{2}\|y\|$$
  Portanto,
  $$\|y\| = \|P_Y(y+z)\| \leq \frac{2}{c}\|y+z\|$$

Concluímos então que

$$\|y\| \leq \frac{2}{c}\|y+z\|\forall\|y\| = 1, \forall z \in Z \Rightarrow \|y\| \leq \frac{2}{c}\|y+z\|\forall y \in Y, \forall z \in Z$$

Portanto,

$$\|P_Y(y+z)\| \leq \frac{2}{c}\|y+z\|.$$

Logo, P_Y é contínua. Analogamente, prova-se que P_X é contínua.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Seja $(y_n+z_n) \in (Y+Z)^{\mathbb{N}}$, convergente a $x \in X$. Mostraremos que $x \in Y+Z$. Observe que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em Y, pois

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &= \left\|P_Y(y_n+z_n) - P_Y(y_m+z_m)\right\| \\ &= \left\|P_Y((y_n+z_n)-(y_m+z_m))\right\| \\ &\leq \left\|P_y\right\|\left\|(y_n+z_n)-(y_m+z_m)\right\| \to 0 \end{aligned}$$

pois X é de Banach. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in Y$. Analogamente, vemos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em Z, e $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in Z$.

Pela continuidade de P_Y e de P_Z :

$$y_n = P_Y(y_n+z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_Y(x) = y \in Y \quad \text{(pois Y é fechado.)}$$

$$z_n = P_Z(y_n+z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_Z(x) = z \in Z \quad \text{(pois Z é fechado.)}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}(y_n+z_n) = P_Y(x) + P_Z(x) = y + z \in Y + Z.$$

$\therefore Y + Z$ é fechado. □

Quando as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do teorema 30 são satisfeitas, dizemos que $Y \oplus Z$ é *soma direta topológica*.

Capítulo 9

Espaços de Hilbert

9.1 Produto interno

Definição 103. Seja X um K-espaço vetorial, onde $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um *produto interno* $\langle , \rangle$ em X é uma aplicação $\langle , \rangle \colon X \times X \to K$, tal que, para todos $x, y, z \in X, \alpha \in K$:

1. $\langle x + \alpha y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \alpha\langle y, z\rangle$
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Observação 27. Para $K = \mathbb{R}$, as duas primeiras condições implicam que $\langle , \rangle$ é bilinear.

No caso $K = \mathbb{C}$, $\langle , \rangle$ é chamada sesquilinear (linear na primeira coordenada e sesquilinear na segunda, ou seja

$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle)$$

Exemplo 73. Se $X = \mathbb{R}^n$, então um produto interno entre $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Exemplo 74. Seja $X = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Então, dadas $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, temos que

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\Big(AB^T\Big)$$

é um produto interno em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 75. Seja $X = \mathbb{R}_2[x]$. Dados $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, então

$$\langle p, q\rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

é um produto interno em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 76. Seja $\mathcal{C}([a,b])$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas em $[a,b]$. Então

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

é um produto interno.

Proposição 101 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \quad \forall x, y \in X$$

Demonstração. Se $y = 0$, a desigualdade é clara. Seja $y \neq 0$. Então

$$0 \leq \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle =$$

$$\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} = \langle x, x\rangle - \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|^2}{\langle y, y\rangle} \Rightarrow$$

$$\langle x, x\rangle - \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|^2}{\langle y, y\rangle} \geq 0 \Rightarrow \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|^2}{\langle y, y\rangle} \leq \langle x, x\rangle \Rightarrow$$

$$\left|\langle x, y\rangle\right|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \Rightarrow \left|\langle x, y\rangle\right| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

□

Corolário 17. Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

é uma norma em X, e $\langle , \rangle$ é contínua.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \\
&\leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\left|\langle x, y\rangle\right| \\
&\leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora a continuidade:

$$\left|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle\right| = \left|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y\rangle + \langle x_0, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle\right| \leq \left|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y\rangle\right| + \left|\langle x_0, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle\right| =$$

$$\left|\langle x - x_0, y\rangle\right| + \left|\langle x_0, y - y_0\rangle\right| \leq \|x - x_0\|\|y\| + \|x_0\|\|y - y_0\| \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}]{} 0$$

Logo, $\langle , \rangle$ é contínua. □

9.2. ESPAÇOS DE HILBERT

9.2 Espaços Pré-hilbertianos e Espaços de Hilbert

Definição 104. Seja X espaço vetorial com produto interno. O espaço normado $(X, \|.\|)$ é chamado de *pré-hilbertiano*.

Dizemos que X é um *espaço de Hilbert* quando $(X, \|.\|)$ é completo.

Exemplo 77. $\mathbb{C}^n$ é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

Exemplo 78. ℓ_2 é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \quad \forall x, y \in \ell_2$$

Exemplo 79. $c_{00} \subseteq \ell_2$ é pré-hilbertiano, mas não é um espaço de Hilbert, pois c_{00} não é espaço de Banach.

Exemplo 80. Seja $X = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

X é pré-hilbertiano, mas não é de Hilbert, pois $(X, \|.\|)$ não é completo.

Por exemplo, se $[a,b] = [-1,1]$, tomando

$$f_m(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } -1 \leq t \leq -\frac{1}{m} \\ mt, & \text{se } -\frac{1}{m} \leq t \leq \frac{1}{m} \\ 1, & \text{se } \frac{1}{m} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A sequência $(f_m(t))_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, mas não é convergente em X.

Exemplo 81. Seja I um conjunto. Considere

$$\ell_2(I) = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in K^I : \left|\{i \in I : x_i \neq 0\}\right| = \aleph_0 \wedge \sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

munido do produto interno

$$\langle (x_i), (y_i)\rangle = \sum_{i\in I} x_i \overline{y_i}$$

Então $\ell_2(I)$ é um espaço de Hilbert.

Note que $\ell_2(I)$ não é separável quando I não é enumerável.

Proposição 102 (Regra do Paralelogramo)**.** Seja H espaço pré-hilbertiano. Então, para todo $x, y \in H$, são válidos:

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Proposição 103. Os espaços c_0 e ℓ_p, com $p \neq 2$, $1 \leq p < \infty$ não são espaços de Hilbert.

Demonstração. Vamos mostrar o resultado para o caso ℓ_p. Tome

$$e = (1, 0, 0, 0, \ldots) \quad \text{e} \quad f = (0, 1, 0, 0, \ldots)$$

Então

$$\|e-f\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} = \|e+f\|_p^2$$

Além disso, é claro que $\|e\|_p = \|f\|_p = 1$. Dessa forma:

$$\|e-f\|_p^2 + \|e+f\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} \neq 4 = 2(\|e\|_p^2 + \|f\|_p^2)$$

Portanto,

$$\|e-f\|_p^2 + \|e+f\|_p^2 \neq 2(\|e\|_p^2 + \|f\|_p^2)$$

e a regra do paralelogramo não vale para ℓ_p. Logo, esse espaço não é pré-hilbertiano. □

Exemplo 82. Seja $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, com $\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} \left|f(t)\right|$. Vamos ver que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ não é um espaço de Hilbert.

Sejam

$$f(t) = 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{g}(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

Verifica-se facilmente que $\|f\| = \|g\| = 1$. Além disso, $\|f+g\| = 2$ e $\|f-g\| = 1$. Desse modo:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \neq 4 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Logo, a regra do paralelogramo não vale para este espaço, e $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ não pe pré-hilbertiano.

Lema 8 (Identidade de Polarização)**.** Seja H um espaço pré-hilbertiano. Então, se $K = \mathbb{R}$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad \forall x, y \in H$$

Se $K = \mathbb{C}$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \quad \forall x, y \in H$$

Demonstração. □

Proposição 104. Seja X um espaço normado satisfazendo a Lei do Paralelogramo. Então a norma em X é induzida pelo produto interno em X.

Demonstração. □

9.3 Isomorfismos entre Espaços de Hilbert

Proposição 105. Sejam H_1 e H_2 dois espaços pré-hilbertianos e $T\colon H_1 \to H_2$ linear e bijetora. Então são equivalentes:

(i) T é isometria, ou seja $\|T(x)\| = \|x\|$.

(ii) $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Demonstração. **(ii)** $\Rightarrow$ **(i)**: Tome $x = y$. Então

$$\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|T(x)\| = \|x\|, \forall\, x \in H$$

(i) $\Rightarrow$ **(ii)**: Como T é isometria, temos:

$$\|T(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 \Rightarrow \langle T(x)+T(y), T(x)+T(y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle \Rightarrow$$

$$\|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle T(x), T(y)\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \Rightarrow \operatorname{Re}\langle T(x), T(y)\rangle = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle$$

Precisamos mostrar que as partes imaginárias também são iguais. Tomando ix e iy,

$$\operatorname{Re} i\langle ix, y\rangle = \operatorname{Re} i\langle x, y\rangle \Rightarrow \operatorname{Im}\langle T(x), T(y)\rangle = \operatorname{Im}\langle x, y\rangle.$$

Portanto, segue que $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. □

Proposição 106 (Completamento de espaços pré-hilbertianos)**.** Seja H um espaço pré-hilbertiano. Então existe uma imersão isométrica de H em $\tilde{H}$ espaço de Hilbert, com imagem densa, tal que $\tilde{H}$ é único salvo isometrias lineares.

Demonstração. Pelo Teorema do Completamento, existe um espaço de Banach $\tilde{H}$, único salvo isometrias lineares e $\iota\colon H \to \tilde{H}$ isometria tal que $\iota(H)$ é denso em $\tilde{H}$. Chamemos $W = \iota(H)$.

Então W satisfaz a Lei do Paralelogramo e, pela densidade de W e a continuidade da norma, segue que $\tilde{H}$ satisfaz a Lei do Paralelogramo. Logo, H é de Hilbert.

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \iota(x_n), \iota(y_n)\rangle$$

□

Exemplo 83. Seja

$$L_2([0,1]) = \left\{ f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ Lebesgue mensurável tal que } \int_0^1 |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

munido com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

$L_2([0,1])$ é o completamento de $\mathcal{C}([0,1])$ (que é pré-hilbertiano) com o mesmo produto interno.

9.4 Complementos ortogonais

Proposição 107. Sejam H pré-hilbertiano $A \subset H$ convexo não vazio e $x \in H$. São equivalentes para $a_0 \in A$:

(i) $\|x - a_0\| = d(x, A)$;

(ii) $\mathrm{Re}\langle x - a_0, a - a_0\rangle \leq 0 \ \forall a \in A$

Além disso, se existir um tal a_0, ele é único.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente a unicidade de a_0. Sejam a_0 e a_1 satisfazendo (ii). Temos então que

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\langle x - a_0, a - a_0\rangle \leq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x - a_0, a_1 - a_0\rangle \leq 0 \\ \mathrm{Re}\langle x - a_1, a_0 - a_1\rangle \leq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle a_1 - x, a_1 - a_0\rangle \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Re}\langle a_1 - a_0, a_1 - a_0\rangle \leq \|a_1 - a_0\| \leq 0$$

Logo $\|a_1 - a_0\| = 0$, o que implica $a_1 = a_0$.

Notemos que

$$\|x - a\|^2 = \|x - a_0 + a_0 - a\|^2 = \big\|(x - a_0) + (a_0 - a)\big\|^2 = \|x - a_0\|^2 + \|a_0 - a\|^2 + \mathrm{Re}\langle x - a_0, a_0 - a\rangle$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Suponhamos que

$$\|x - a_0\| = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

Então, para todo $a \in A$,temos:

$$\|x - a\|^2 \geq \|x - a_0\|^2$$

Da identidade notada acima, obtemos:

$$\|a_0 - a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x - a_0, a_0 - a\rangle \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x - a_0, a - a_0\rangle \leq \frac{1}{2}\|a_0 - a\|^2$$

Sendo A convexo, para todo $\lambda \in (0, 1)$, temos que

$$a' = (1 - \lambda)a_0 + \lambda a = a_0 + \lambda(a - a_0) \in A$$

Aplicando a' :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle x - a_0, a - a_0\rangle &\leq \tfrac{1}{2}\|a_0 - a\|^2 \\ &\leq \tfrac{1}{2}\big\|\lambda(a_0 - a)\big\|^2 \\ &\leq \tfrac{\lambda}{2}\|a_0 - a\|^2 \end{aligned}$$

Tomando $\lambda \to 0$ obtemos $\mathrm{Re}\langle x - a, a - a_0\rangle \leq 0$ para todo $a \in A$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Se $\mathrm{Re}\langle x - a_0, a - a_0\rangle \leq 0$, sabemos que

$$\|x - a\|^2 = \|x - a_0\|^2 + \|a_0 - a\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x - a_0, a - a_0\rangle.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \|x-a\|^2 &\geq \|x-a_0\|^2 + \|a-a_0\|^2 \\ &\geq \|x-a_0\|^2, \end{aligned}$$

o que implica $\|x-a_0\| = \inf\limits_{a\in A} \|x-a\|$. □

Teorema 31. Sejam H pré-hilbertiano, $A \subseteq H$ convexo e completo não vazio. Então existe um único $a_0 \in A$ tal que

$$\|x-a_0\| = d(x,A)$$

Tal a_0 é caracterizado pelo fato de que $\mathrm{Re}\langle x-a_0, a-a_0\rangle \leq 0, \ \forall a \in A$.

Demonstração. É suficiente provar a existência. Seja $\delta = d(x,A)$. Então pela definição, existe $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \delta$ e a_n em A tal que

$$\delta_n = \|x-a_n\|$$

Vejamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Considere $\vartheta_n = a_n - x$. Então $\vartheta_n + \vartheta_m = a_n + a_m - 2x$. Então:

$$\|\vartheta_n - \vartheta_m\| = 2\left\|\frac{1}{2}(a_n+a_m) - x\right\| \geq 2\delta$$

pois A é convexo, então $\frac{1}{2}(a_n+a_m) \in A$. Assim,

$$\|a_n - a_m\|^2 = \left\|\vartheta_n + x - (\vartheta_m + x)\right\|^2 = \|\vartheta_n - \vartheta_m\|^2 = 2(\|\vartheta_n\|^2 + \|\vartheta_m\|^2) - \|\vartheta_n + \vartheta_m\|^2 \leq 2\delta_n^2 + 2\delta_n^2 - 4\delta^2$$

Tomando o limite para $n,m \to \infty$, temos $\|a_n - a_m\|^2 \to 0$. Logo, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Sendo A completo, seja $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Então:

$$\|x-a_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x-a_n\| = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta = d(x,A) \Rightarrow \|x-a_0\| = d(x,A)$$

□

Definição 105. Seja H um espaço pré-hilbertiano. Então, dizemos que $x,y \in H$ são *ortogonais*, e denotamos por $x \perp y$, se $\langle x,y\rangle = 0$.

Exemplo 84. Em $\mathbb{R}^2$, com o produto interno

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2,$$

temos que $x = (2,3)$ e $y = (-3,2)$ são ortogonais.

Exemplo 85. Em $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, com o produto interno

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

temos que $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \mathrm{sen}(x)$ são ortogonais.

Teorema 32 (Teorema de Pitágoras)**.** Seja H pré-hilbertiano. Então,

$$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Definição 106. Sejam H pré-hilbertiano e $A \subseteq H$. O *ortogonal* de A é definido por

$$A^\perp = \{h \in H | h \perp a \ \forall a \in A\}$$

Observação 28. $A^\perp$ é um subespaço fechado de H.

Exemplo 86. Seja $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Tome $W = \langle (1,-1,1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Então

$$W^\perp = \langle (0,1,1),(1,1,0) \rangle.$$

Exemplo 87. Considere $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, com o produto interno

$$\langle f,g \rangle \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Tome

$$M = \{f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}) | f(t) = -f(-t), \forall t \in [-1,1]\}$$

M é o conjunto das funções ímpares definidas em $[-1,1]$. Lembrando que, se f é ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, e que o produto de duas funções de paridades distintas é ímpar, então

$$M^\perp = \{f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}) | f(t) = f(-t), \forall t \in [-1,1]\}.$$

ou seja, o conjunto das funções pares definidas em $[-1,1]$.

Proposição 108 (Projeção ortogonal)**.** Sejam H espaço pré-hilbertiano, F subespaço completo de H, $F \neq \emptyset$ e $x \in H$. Então existe um único $f_0 \in F$ tal que

$$\|x - f_0\| - d(x,F)$$

Tal f_0 é caracterizado pelo fato de que $x - f_0 \in F^\perp$.

Demonstração. Da proposição anterior, sendo F convexo e completo, existe um $f_0 \in F$ tal que $\|x - f_0\| - d(x,F)$. caracterizado por $\mathrm{Re}\langle x - f_0, f - f_0 \rangle \leq 0$, para todo $f \in F$.

Se $x - f_0 \in F^\perp$, então $\mathrm{Re}\langle x - f_0, f - f_0 \rangle \leq 0$, pois $f - f_0 \in F$.

Suponha que $\mathrm{Re}\langle x - f_0, f - f_0 \rangle \leq 0$ é verificada. Seja $f \in F$, $f + f_0 \in F$. Então

$$\mathrm{Re}\langle x - f_0, (f + f_0) - f_0 \rangle \leq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x - f_0, f \rangle \leq 0$$

Como $-f \in F$, então podemos escrever

$$\mathrm{Re}\langle x - f_0, -f \rangle \leq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x - f_0, f \rangle \geq 0 \quad \forall f \in F$$

Se $K = \mathbb{R}$, isso conclui. Se $K = \mathbb{C}$, então $if \in F$. Daí:

$$0 = \mathrm{Re}\langle x - f_0, if\rangle = \mathrm{Re}(-i\langle x - f_0, f\rangle) = \mathrm{Im}\langle x - f_0, f\rangle$$

Portanto, concluímos que $\langle x - f_0, f\rangle = 0$ para todo $f \in F$, o que quer dizer que

$$x - f_0 \in F^{\perp}.$$

□

Proposição 109. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e F subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Então

$$\mathcal{H} = F \oplus F^{\perp}$$

Demonstração. Como $\mathcal{H}, F$ e $F^{\perp}$ são espaços de Banach, então $F \oplus F^{\perp}$ é uma soma direta topológica.

Como F é subespaço, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Seja $h \in H$, consideremos f a projeção ortogonal de h sobre F. Então, $h - f \in F^{\perp}$.

Logo, $h = f = (h - f) \in F + F^{\perp}$, e $\mathcal{H} = F + F^{\perp}$. Potanto $\mathcal{H} = F \oplus F^{\perp}$.

□

Definição 107. Seja $\mathcal{H}$ Hilbert e F fechado não vazio tal que $\mathcal{H} = F \oplus F^{\perp}$. Então

$$\begin{array}{rcccl} p_F & : & \mathcal{H} & \longrightarrow & F \\ & & h & \longmapsto & p_F(h) = f \end{array}$$

Onde $h = f + g$, com $f \in F$ e $g \in F^{\perp}$, é chamada *projeção ortogonal* de $\mathcal{H}$ sobre F.

Proposição 110. A projeção ortogonal definida em 107 satsifaz as seguintes propriedades:

(i) p_F é linear e contínua;

(ii) $\mathrm{Ker}(p_F) = F^{\oplus}$ e $\mathrm{Im}(p_F) = F$;

(iii) $p_F^2 = p_F$

(iv) $p_{F^{\perp}} = Id - p_F$.

Demonstração. **(i)** Trivial.

(ii) Se $p_F(h) = 0$, então $f = 0$. Logo, $h = 0 + g \in F^{\perp}$. Portanto, $\mathrm{Ker}(p_F) = F^{\oplus}$. Além disso, $p_F(h) = f \in F$. Logo, $\mathrm{Im}(p_F) = F$.

(iii) $p_F^2(h) = p_F(f) = f = p_F(h)$. $\therefore p_F^2 = p_F$.

(iv) Temos que $p_{F^{\perp}}(h) = p_{F^{\perp}}(f+g) = g = (f+g)-f = Id(h)-p_F(h)$. Logo $p_{F^{\perp}} = Id-p_F$.

□

Corolário 18. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e F subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Então $F = F^{\perp\perp}$.

Demonstração. É claro que $F \subseteq F^{\perp\perp}$.

Seja $h \in F^{\perp\perp}$, e escreva $h = f + g$, com $f \in F$ e $g \in F^{\perp}$. Então

$$\langle h, g\rangle = \langle f + g, g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \Rightarrow \langle h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \Rightarrow$$

$$0 = 0 + \|g\|^2 \Rightarrow g = 0$$

Logo, $h = f \in F$, daí $F^{\perp\perp} \subseteq F$. Logo, $F = F^{\perp\perp}$. □

Vamos ver o que acontece com o ortogonal de um espaço denso num espaço de Hilbert. Sendo M denso, intuitivamente o conjunto tem tantos elementos que não é possível existir vetor não nulo que é ortogonal a todos os elementos de M.

Corolário 19. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e M subespaço de $\mathcal{H}$. Então M é denso em $\mathcal{H}$ se e somente se $M^{\perp} = \{0\}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos M denso. Seja $h \in M^{\perp}$. Considere $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M tal que $h = \lim\limits_{n\to\infty} h_n$. Segue da continuidade do produto interno que

$$\langle h, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle h, h_n\rangle = 0 \Rightarrow h = 0$$

($\Leftarrow$) Seja M um subespaço de $\mathcal{H}$ tal que $\overline{M} \neq \mathcal{H}$, e seja $h \in \mathcal{H} \setminus \overline{M}$. Seja $h_0 = p_{\overline{M}}(h)$. Então $h - h_0 \in \overline{M}^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$. Logo, $h - h_0 \neq 0$, pois $h \notin \overline{M}$. □

9.5 Somabilidade

Definição 108. Sejam X espaço normado. Uma família $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de X é dita *somável*, e tem soma $x \in X$, se dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subseteq I$ finito tal que $\forall F \subseteq I$ finito, $F \supset F_\varepsilon$,

$$\left\| x - \sum_{i\in F} x_i \right\| < \varepsilon$$

Proposição 111. Seja I infinito e enumerável. Uma família $(x_i)_{i\in I}$ de um espaço normado é somável e tem soma x se, e somente se, para toda bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to I$,

$$\lim_{i=1}^{n} x_{\varphi(i)} = x$$

Proposição 112. Se $(x_i)_{i\in I}$ é somável em um espaço normado X, então $I' = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ é enumerável e $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i\in I'} x_i$.

Em resumo, as duas proposições acima nos mostram que $(x_i)_{i\in I}$ é somável e tem soma x se e somente se

(i) $I' = \{i \in I : x_i \neq 0$ é enumerável.

(ii) Para toda enumeração de I',

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} = x$$

Proposição 113. Sejam H um espaço pré-hilbertiano e $(x_i)_{i\in I}$ uma família somável com soma x. Então, para todo $y \in H$, $(\langle x_i, y\rangle)_{i\in I}$ é somável e

$$\sum_{i\in I} \langle x_i, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Demonstração. Para todo $F \subset I$ finito, como a família $(x_i)_{i\in I}$ é somável, então

$$\left\| x - \sum_{i\in F} x_i \right\| < \varepsilon$$

Logo,

$$\left| \langle x, y\rangle \left\langle \sum_{i\in F} x_i, y \right\rangle = \left| x - \left\langle \sum_{i\in F} x_i, y \right\rangle \right| \leq \left\| x - \sum_{i\in F} x_i \right\| \|y\| = \frac{\varepsilon}{\|y\|} \cdot \|y\| = \varepsilon \right|$$

$\square$

Exemplo 88. Considere $H = \mathbb{R}^2$ e a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definida por $x_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n^2}\right)$. Essa família é somável, e sua soma é $\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$. Tomando $y = \left(2, \frac{1}{\pi^2}\right)$, temos que $(\langle x_n, y\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definida por $\langle x_n, y\rangle = \left(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{(n\pi)^2}\right)$, é somável, e sua soma é $\langle\left(1, \frac{\pi^2}{6}\right), \left(2, \frac{1}{\pi^2}\right)\rangle = \left(2, \frac{1}{6}\right)$. Logo, podemos escrever

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{(n\pi)^2}\right) = \left(2, \frac{1}{6}\right)$$

Proposição 114. Seja $(\alpha_i)_{i\in I}$ uma família de números reais positivos tais que $\exists a > 0$ tal que para todo $F \subset I$ finito

$$\sum_{i\in F} \alpha_i = a.$$

Então, $(\alpha_i)_{i\in I}$ é somável e

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \sup_{F\subset I} \sum_{i\in F} \alpha_i \leq a$$

Definição 109 (Condição de Cauchy)**.** Uma família $(x_i)_{i\in I}$ de um espaço normado X satisfaz *a condição de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset I$ finito tal que para todo $F' \subset I$ finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ temos

$$\left\| \sum_{i\in F'} x_i \right\| < \varepsilon$$

Proposição 115. Seja X espaço de Banach. Uma família $(x_i)_{i\in I}$ é somável se e somente se satisfaz a condição de Cauchy.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, seja x a soma, F_ε dado pela definição de somabilidade e $F \subset I$, disjunto de F_ε. Então:

$$\left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| = \left\|\sum_{i\in F} x_i + \left(\sum_{i\in F_\varepsilon} -x\right) - \left(\sum_{i\in F_\varepsilon} -x\right)\right\| \leq \left\|\sum_{i\in F\cup F_\varepsilon} -x\right\| + \left\|x - \sum_{i\in F_\varepsilon} x_i\right\| < \varepsilon + \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Seja $I_n = \left\{i \in \mathbb{N} | |x_i| < \frac{1}{n}\right\}$. Como $(x_i)_{i\in I}$ satisfaz a condição de Cauchy, então I_n é finito. Tome $y_n = \sum_{i\in I_n} x_i$. Dado $\varepsilon > 0$, existe F_ε contido em $\mathbb{N}$ e finito, tal que se $F \subset \mathbb{N}$, F finito com $F \cap F_\varepsilon = \emptyset$,

$$\left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| < \varepsilon$$

Para N tal que $F_\varepsilon \subset I_N$ e $m > n \geq N$, $F_\varepsilon \subset I_N \subset I_n \subset I_m$, $F = I_m - I_n \subset (F_\varepsilon)^\complement$ e

$$\|y_m - y_n\| = \left\|\sum_{i\in I_m} x_i - \sum_{i\in I_n} x_i\right\| = \left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| < \varepsilon.$$

Logo, existe $x \in X$ tal que $\lim_{m\to\infty} y_m = x$, $\|x - y_n\| < \varepsilon, \forall n \geq N$. Vamos verificar que $x = \sum_{i\in I} x_i$. Se $F \supset I_N$, $F' = F - I_N \subset (F_\varepsilon)^\complement$, e portanto

$$\left\|x - \sum_{i\in F} x_i\right\| = \left\|x - \sum_{i\in I_N} x_i - \sum_{i\in F'} x_i\right\| \leq \|x - y_N\| + \left\|\sum_{i\in F'} x_i\right\| < \varepsilon + \varepsilon$$

□

9.6 Bases ortonormais

Definição 110. Seja H pré-hilbertiano. Uma família $(e_i)_{i\in I}$ de H é *ortogonal* se $\langle e_i, e_j\rangle = 0\ \forall i \neq j$.

Se além disso, $\|e_i\| = 1\ \forall i$, dizemos que $(e_i)_{i\in I}$ é *ortonormal*.

Exemplo 89. A base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ do $\mathbb{C}^n$, onde $e_{ij} = \delta_{ij}$ é ortonormal, pois

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0\ \forall i \neq j$$

Exemplo 90. Seja $\mathcal{C}([0, 2\pi, \mathbb{R})$, munido com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Considere as famílias $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dadas por

$$u_n = \cos(nt) \quad \text{e} \quad v_n = \operatorname{sen}(nt)$$

Então, as famílias $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ são ortogonais. Além disso, $u_n \perp v_m$, para todos n e m.

Proposição 116. Se $(e_i)_{i\in I}$ é ortogonal, com $e_i \neq 0$ para todo $i \in I$, então $\{e_i : i \in I\}$ é LI.

Demonstração. Seja $F \subseteq I$ finito e $\alpha_i \in F$ escalares tais que

$$\sum_{i\in I} \alpha_i e_i = 0.$$

Fazendo o produto interno com e_j :

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \langle e_i, e_j\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_j\langle e_j, e_j\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_j \left\|e_j\right\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$$

□

Lema 9 (Desigualdade de Bessel)**.** Seja H um espaço pré-hilbertiano e $(e_i)_{i\in I}$ uma família ortonormal. Então, para todo $x \in H$, a família $(\left|\langle x, e_i\rangle\right|^2)_{i\in I}$ é somável, e

$$\sum_{i\in I} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2 \leq \|x\|^2$$

Demonstração. Seja $F \subset I$ finito e $X_F = [e_i | i \in F]$ subespaço fechado de H. Para cada $x \in H$, seja $y = p_{X_F}(x)$. Então

$$y = \sum_{i\in F} \lambda_i e_i, \quad \lambda_i = \langle y, e_i\rangle$$

Note que $x - y \in X_F^\perp$, pois

$$x = \underbrace{y}_{\in X_F} + \underbrace{(x-y)}_{\in X_F^\perp}$$

Logo:

$$\begin{aligned} x - y \in X_F^\perp \quad &\Rightarrow \quad \langle x - y, e_i\rangle = 0 \quad \forall i \in F \\ &\Rightarrow \quad \langle x, e_i\rangle - \langle y, e_i\rangle \quad \forall i \in F \\ &\Rightarrow \quad y = \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\|x\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2 \Rightarrow \sum_{i\in F} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2 \leq \|x\|^2$$

$\square$

Teorema 33 (Teorema da Base Ortonormal)**.** Seja H espaço pré-hilbertiano e $(e_i)_{i\in I}$ uma família ortonormal. São equivalentes as seguintes propriedades:

♣ Para todo $x \in H$, temos

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$$

♥ (Igualdade de Parseval) Para quaisquer $x, y \in H$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$$

♠ (Igualdade de Bessel) Para todo $x \in H$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2$$

Quando H é um espaço de Hilbert, as propriedades precedentes ainda são equivalentes às seguintes:

♦ $H = \overline{[e_i | i \in I]}$

✠ $(e_i)_{i\in I}$ é uma família ortonormal maximal.

Uma família ortonormal num espaço pré-hilbertiano que satisfaz as duas primeiras condições é chamada *base hilbertiana* ou *base ortonormal* de H.

Demonstração. (♣ ⇒ ♥) Suponhamos que todo $x \in H$ é da forma $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$. Seja $y \in H$. Então

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i, y \right\rangle \\ &= \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle \\ &= \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}\end{aligned}$$

(♥ ⇒ ♠) Suponha que $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$. Tome $y = x$. Então

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_i\rangle} \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{i\in I} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2$$

($\spadesuit \Rightarrow \clubsuit$) Sejam $x \in H$ e $F \subset I$ finito, e considere $X_F = [e_i, i \in F]$. Então

$$y = p_{X_F}(x) = \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Assim, $\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|x\|^2$, pois $x - y \perp y$.

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 \Rightarrow \left\| x - \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \left\| \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2$$

Segue da definição de somabilidade que $x = \sum\limits_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.

($\spadesuit \Rightarrow \blacklozenge$) Da demonstração da implicação anterior, dado $x \in H$ e $F \subset I$ finito:

$$\left\| x - \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| = \|x\|^2 - \sum_{i \in F} \left| \langle x, e_i \rangle \right|^2.$$

Usando a hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset I$ finito tal que

$$\left\| x - \sum_{i \in F_\varepsilon} \lambda_i e_i \right\| < \varepsilon,$$

com $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$, para $i \in F_\varepsilon$. Portanto $x \in \overline{[e_i : i \in I]}$.

($\blacklozenge \Rightarrow$ ✠) Se existe $e \in H$ tal que $\langle e, e_i \rangle = 0 \ \forall i \in I$, então

$$e \in [e_i : i \in I]^\perp = \overline{[e_i : i \in I]}^\perp = \overline{H}^\perp = \{0\}$$

Portanto, $(e_i)_{i \in I}$ é uma família ortonormal maximal.

(✠ $\Rightarrow \clubsuit$) Dado $x \in H$, sendo H espaço de Hilbert, então $(\left|\langle x, e_i \rangle\right|^2)_{i \in I}$ é somável. Vejamos que $\sum\limits_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ é somável.

Para isto, mostremos que $\sum\limits_{i \in I} \langle x, e_i \rangle$ satisfaz a condição de Cauchy. Dado $F' \subset I$ finito

$$\left\| \sum_{i \in F'} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i \in F'} \left| \langle x, e_i \rangle \right|^2$$

Como $(\left|\langle x, e_i \rangle\right|^2)_{i \in I}$ satisfaz a condição de Cauchy, então $(\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$ satisfaz a condição de Cauchy.

Como o espaço é completo, $\exists e \in H$ tal que $e = \sum\limits_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$. Logo,

$$\langle e, e_j \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle \Rightarrow \langle x - e, e_j \rangle = 0$$

Então $x - e \in \{e_i : i \in I\}^{\perp}$.

Por hipótese, $(e_i)_{i\in I}$ é maximal, o que implica $x = e$, pois sendo maximal, não existe um elemento ξ que seja ortonormal a todos os elementos da família $(e_i)_{i\in I}$, ou seja,

$$\nexists \xi \in H : \xi - e_i = 0 \forall i \in I$$

Daí, $x = e$, e assim

$$x = e = \sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

□

Observação 29. Em espaços pré-hilbertianos, em geral não vale a implicação (✠ ⇒ ♣). Existem espaços pré-hilbertianos sem base ortonormal. Apesar de parecer simples, este é um resultado não trivial. A título de curiosidade, apresentamos no teorema abaixo uma demonstração desse fato.

Teorema 34. Existe um espaço pré-hilbertiano H que não possui base ortonormal.

Demonstração. Lembremos que a dimensão de um espaço pré-hilbertiano é a cerdinalidade do sistema ortonormal maximal que o contém (pelo Lema de Zorn 1, ele contém ao menos um, e quaisquer dois devem ter a mesma cardinalidade). Uma base ortonormal é certamente uma base ortonormal maximal, mas como veremos, a recíproca não é verdadeira. Observe que se G é um subespaço denso de um espaço pé-hilbertiano H, então qualquer base ortonormal para G é automaticamente uma base ortonormal para H.

Dessa forma, é suficiente construir um espaço pré-hilbertiano H com subespaço denso G cuja dimensão é estritamente menor que o de H.

Seja $\mathcal{K}$ um espaço de Hilbert com dimensão $\aleph_0$. (por exemplo, $\mathcal{K} = \ell_2(\mathbb{N})$) Seja $E = \{e_i : i \in I\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{K}$, então $\big|\{e_i : i \in I\}\big| = \aleph_0$. Estenda E a uma base de Hamel $E \cup F$ para $\mathcal{K}$, onde $E \cap F = \emptyset$. Uma vez que sabemos que a dimensão de Hamel de $\mathcal{K}$ é c (a cardinalidade do contínuo), deve ocorrer que $|F| = c$.

Seja $\mathcal{L}$ um espaço de Hilbert de dimensão c (por exemplo, $\mathcal{L} = \ell_2(\mathbb{R})$). Seja B uma base ortonormal para $\mathcal{L}$, e considere

$$\varphi \colon F \to B$$

uma bijeção. Então existe uma transformação linear tal que

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ k & \longmapsto & T(k) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{se } k \in F; \\ 0, & \text{se } k \in E. \end{cases} \end{array}$$

Considere $H = \mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$. e tome

$$G = \{(k, T(k)) : k \in \mathcal{K}\}$$

como o gráfico de T. Seja $\overline{G}$ o fecho de G em H. Vamos mostrar que $\overline{G} = H$.

Como para qualquer $e \in E$ temos que $(e, o) \in G$, segue que $\mathcal{K} \oplus \{0\} \subset \overline{G}$.

Se $b \in B$, então $b = T(f)$ para algum $f \in F \subset \mathcal{K}$. Logo, $(f, b) \in G \subset \overline{G}$. Como $(f, 0) \in \overline{G}$ da mesma forma, também temos que $(0, b) \in \overline{G}$. Segue então que $\{0\} \oplus \mathcal{L} \subset \overline{G}$. Daí, $\overline{G} = H$, e G é denso em H.

Finalmente, temos que $\{(e, 0) : e \in E\}$ é um conjunto ortonormal maximal em G; se

$$0 = \langle (e, 0), (k, T(k)) \rangle = \langle e, k \rangle + \langle 0, T(k) \rangle = \langle e, k \rangle$$

para todo $e \in E$, então certamente $k = 0$, logo $(k, T(k)) = (0, 0)$ é o vetor nulo em G. Consequentemente, a dimensão de G é $|E| = \aleph_0$, enquanto que é claro que a dimensão de H é c. Isso completa a demonstração.

□

Proposição 117. Sejam H espaço pré-hilbertiano e $F \subseteq H$ ortonormal de H. Então existe um subconjunto ortonormal maximal de H que contém F.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as famílias ortonormais de H que contém F com a relação de ordem de inclusão.

Seja $\mathfrak{C} = \{M_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma cadeia em $\mathcal{A}$. Então $\bigcup_{\alpha \in J} M_\alpha$ é uma família ortonormal. Além disso, é cota superior de $\mathfrak{C}$.

Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal em $\mathcal{A}$. □

Teorema 35. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $(e_i)_{i \in I}$ uma família ortonormal. Então $\mathcal{H}$ contém uma base hilbertiana contendo $(e_i)_{i \in I}$.

Demonstração. Da proposição anterior, $\mathcal{H}$ contém uma família ortonormal maximal contendo $(e_i)_{i \in I}$.

Pelo Teorema da Base Ortonormal, tal conjunto maximal é base hilbertiana de $\mathcal{H}$.

□

Observação 30. Uma base hilbertiana finita é base algébrica de $\mathcal{H}$, o que corresponde ao caso de dimensão finita.

Uma base hilbertiana infinita enumerável é base de Schauder de $\mathcal{H}$.

Num espaço pré-hilbertiano qualquer, nem sempre todo conjunto ortonormal será enumerável. Mas se nos restringirmos aos espaços pré-hilbertianos separáveis, tal propriedade será válida, o que nos permitirá explorar os espaços que satisfazem essas condições com mais detalhes.

Proposição 118. Seja H um espaço pré-hilbertiano separável. Então todo conjunto ortonormal de H é enumerável.

Demonstração. Seja $(e_i)_{i \in I}$ uma família ortonormal de H. Segue que

$$\left\| e_i - e_j \right\| = \sqrt{2}$$

Seja $D \subseteq H$ denso e enumerável em H.

Seja

$$\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & D \\ i & \longmapsto & f(i) = d_i \in B\left(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}$$

Segue que f é injetora. Daí, $|I| = |D| = \aleph_0$. Portanto, I é enumerável. □

Corolário 20. Todo espaço de Hilbert separável admite uma base hilbertiana enumerável.

9.7 Processo de ortonormalização de Gramm-Schmidt

Teorema 36. Sejam H espaço pé-hilbertiano e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores em H linearmente independentes. Então existe uma sequência ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em H tal que

$$[x_1, \dots x_n] = [e_1, \dots, e_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demonstração. Definamos os vetores de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por recorrência:

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$e_2 = \frac{x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1}{\left\|x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1\right\|}$$

$$\vdots$$

$$e_n = \frac{x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \langle x, e_k\rangle e_k}{\left\|x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \langle x, e_k\rangle e_k\right\|}$$

É rotineiro mostrar que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de fato uma família ortonormal. □

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso e linearmente independente, então pelo processo de ortonormalização de Gramm-Schmidt, obtemos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base hilbertiana, pois, nesse caso, $\overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]} = \mathcal{H}$. Logo $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é base hilbertiana pelo Teorema da Base Ortonormal.

Exemplo 91.

O próximo resultado nos mostra que para analisar o comportamento dos espaços de Hilbert separáveis, basta estudar as propriedades de ℓ_2, o que simplifica bastante o estudo desses espaços.

Proposição 119. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Então $\mathcal{H}$ é linearmente isométrico a ℓ_2.

Demonstração. Seja $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Considere

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell_2 \\ & & x & \longmapsto & (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Segue do fato de ser base hilbertiana $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\langle x, e_n\rangle\right|^2$.

Logo, T é imersão isométrica, e também é sobrejetora: seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$.

Observemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ é convergente em $\mathcal{H}$, pois a sequência das somas parciais é de Cauchy:

$$\left\|\sum_{n=p}^{q} a_n e_n\right\| = \sqrt{\sum_{n=p}^{q} |a_n|^2} \xrightarrow[\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}]{} 0$$

Portanto, $T\left(\sum\limits_{n=p}^{q} a_n x_n\right) = a$. Concluímos que T é isometria linear. $\square$

Seja K um espaço topológico Hausdorff. Considere

$$\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) = \{f \colon K \to \mathbb{C} \text{ contínuas}\},$$

munido com $\|\mathbf{.}\|_\infty$.

Teorema 37 (Stone-Weierstrass Complexo)**.** Seja K um espaço topológico Hausdorff. Seja $\mathcal{A}$ uma subálgebra de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ (isot é, $\mathcal{A}$ é subespaço de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ tal que se $f, g \in \mathcal{A}$, então $fg \in \mathcal{A}$.) tal que

(i) $\mathcal{A}$ contém as funções constantes;

(ii) $\mathcal{A}$ separa pontos, isto é, se $x \neq y \in K$, então existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$;

(iii) $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$.

Então $\mathcal{A}$ é denso em $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ na topologia de convergência uniforme $\|\mathbf{.}\|_\infty$.

Exemplo 92. A família $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ é base ortonormal de $L^2[-\pi, \pi]$.

De fato, chamemos $e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}$. Temos que $e_k \cdot e_\ell = e_{k+\ell}$ e $\overline{e_k} = e_{-k}$.

Assim, $\mathcal{A} = [e_k : k \in \mathbb{Z}]$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ fechada por conjugado complexo.

Note que $\mathcal{A}$ contém as constantes, pois e_0 é constante não nula.

$\mathcal{A}$ separa pontos. Para $x, y \in (-\pi, \pi)$, e_1 separa pontos, pois

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos t + i \text{sen} t)$$

Para ver que $\mathcal{A}$ também separa $-\pi$ e π, teremos um pouquinho de trabalho.

Considere

$$V = \{f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) : f(-\pi) = f(\pi)\}$$

Observe que $(V, \|\cdot\|_2)$ é denso em $(\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$.

Seja

$$\mathbb{T} = \{e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq \pi\} = \{z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$$

$(V, \|\cdot\|_\infty)$ é isométrico a $(\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. De fato, considere

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & V & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \\ & & f & \longmapsto & (\varphi(f))(e^{i\theta}) = f(\theta) \end{array}$$

$\mathcal{A} = [z^n : n \in \mathbb{Z}]$ é subálgebra de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, fechada por conjugado, já que, se $|z| = 1$, então

$$\overline{z^n} = z^{-n}$$

Veja que $\mathcal{A}$ é denso em $(\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. Pelo fato de $(V, \|\cdot\|_\infty)$ e $(\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ serem isométricos, então

$$\tilde{\mathcal{A}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z}\right]$$

é denso em $(V, \|\cdot\|_\infty)$. Portanto, concluímos que $\tilde{\mathcal{A}}$ é denso em $(V, \|\cdot\|_2)$.

Então, pelo Teorema de Stone-Weierstrass Complexo, $\mathcal{A}$ é denso em $(\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Seja $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em $\mathcal{A}$ tal que f_n converge uniformemente a f.

Dado que

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_\infty \ \forall f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \Rightarrow$$

$$\|f - f_n\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f - f_n\|_\infty \Rightarrow f_n \to f \text{ com respeito à norma } \|\cdot\|_2$$

Assim, $\mathcal{A}$ é denso em $(\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$.

Como $(\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ é denso em $L^2[-\pi, \pi]$, segue que $\mathcal{A}$ é denso em $L^2[-\pi, \pi]$, isto é,

$$\overline{\mathcal{A}} = L^2[-\pi, \pi] \Rightarrow \overline{[e_k : k \in \mathbb{Z}]} = L^2[-\pi, \pi]$$

Pelo Teorema da Base Ortonormal, a família $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é base ortonormal de $L^2[-\pi, \pi]$.

Observação 31. Segue do Teorema da Base Ortonormal que para toda $f \in \mathcal{C}(-\pi, \pi)$, sua série de Fourier converge na norma $\|\cdot\|_2$, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e_k \right\|_2 = 0,$$

onde

$$\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t$$

Exemplo 93 (Polinômios de Legendre)**.** Chamemos de $\{p_n(t), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ a sequência obtida do processo de ortonormalização de Gramm-Schmidt ao conjunto linearmente independente $\{f_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ com respeito ao produto interno usual em $L^2[-1, 1]$.

Esse polinômios são chamados *Polinômios de Legendre*. Eles possuem diversas aplicações na Física.

Vamos mostrar que $(p_n(t))_{n\geq 0}$ é base ortonormal para $L^2[-1, 1]$. Tem-se

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n}(t^2 - 1)^n$$

A tabela abaixo mostra os 11 primeiros polinômios de Legendre:

n	$p_n(t)$
0	1
1	t
2	$\frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right)$
3	$\frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right)$
4	$\frac{1}{8}\left(35t^4 - 30t^2 + 3\right)$
5	$\frac{1}{8}\left(63t^5 - 70t^3 + 15t\right)$
6	$\frac{1}{16}\left(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5\right)$
7	$\frac{1}{16}\left(429t^7 - 693t^5 + 315t^3 - 35t\right)$
8	$\frac{1}{128}\left(6435t^8 - 12012t^6 + 6930t^4 - 1260t^2 + 35\right)$
9	$\frac{1}{128}\left(12155t^9 - 25740t^7 + 18018t^5 - 4620t^3 + 315t\right)$
10	$\frac{1}{128}\left(46189t^{10} - 109395t^8 + 90090t^6 - 30030t^4 + 3465t^2 - 63\right)$

Os gráficos dos polinômios de Legendre com $n \leq 5$ são mostrados abaixo:

Segue do Teorema de Stone-Weierstrass que

$$\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) = \overline{[t^n, n \geq 0]}^{\|\cdot\|_\infty} = \overline{[p_n, n \geq 0]}^{\|\cdot\|_\infty}$$

Além disso,

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|_\infty \; \forall f \in L^2[-1, 1]$$

Daí, $[p_n, n \geq 0]$ é denso em $(\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$, e $[p_n, n \geq 0]$ é denso em $L^2[-1, 1]$.

Sendo que $(p_n)_{n\geq 0}$ é uma família ortonormal, segue do Teorema da Base Ortonormal que $(p_n)_{n\geq 0}$ é base ortonormal de $L^2[-1, 1]$.

9.8 Dualidade e Operadores Adjuntos

Vamos ver como se comportam os operadores nos espaços com produto interno. Sabemos a "cara"dos elementos que estão no dual de um espaço de Hilbert, por conta do

Teorema 38 (Teorema de Riesz)**.** Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Para cada $f \in \mathcal{H}^*$, existe um único $z \in \mathcal{H}$ tal que

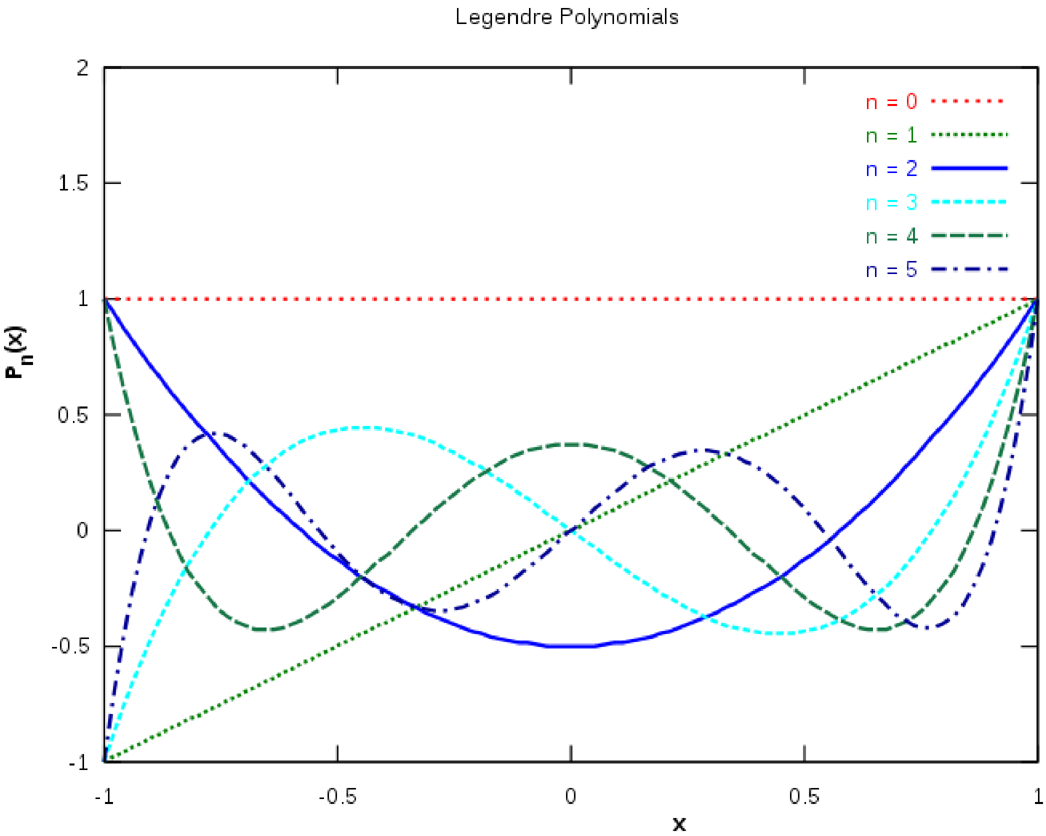


Figura 9.1: Gráficos dos polinômios de Legendre com $n \leq 5$

- $f(x) = \langle x, z \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H};$
- $\|f\| = \|z\|.$

Demonstração. Seja $z \in \mathcal{H}$. Definamos

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_z & : & \mathcal{H} & \longrightarrow & K \\ & & x & \longmapsto & \varphi_z(x) = \langle x, z \rangle \end{array}$$

Observe que φ_z é linear. Além disso, φ_z é contínua. Vejamos que $\|f\| = \|z\|$. Seja $x \in B_{\mathcal{H}}$. Então,

$$\left|\varphi_z(x)\right| = \left|\langle x, z \rangle\right| \leq \|x\|\|z\| \leq \|z\| \Rightarrow \boxed{\|\varphi_z\| \leq \|z\|}$$

Suponha agora $z \neq 0$. Então:

$$\|\varphi_z\| \geq \left\|\varphi_z\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right\| = \left\|\frac{\langle z, z \rangle}{\|z\|}\right\| = \|z\|$$

Portanto, $\|\varphi_z\| = \|z\|$.

Vamos ver que todo operador linear é dessa forma. Seja $f \in \mathcal{H}^*$.

Se $z \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle$, se $x \in \mathrm{Ker} f$, então $x \perp z$, e então $z \in (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$.

Suponhamos $f \neq 0$. Consideremos $Z = \mathrm{Ker} f$ hiperplano fechado de $\mathcal{H}$. Pelo Teorema da Projeção Ortogonal,

$$\mathcal{H} = Z \oplus Z^{\perp}$$

Como $f \neq 0$, $Z^{\perp} \neq 0$. Seja $z_0 \in Z^{\perp}$, $z_0 \neq 0$.

Dado $x \in \mathcal{H}$,

$$x = \left(x - f(x)\frac{z_0}{f(z_0)}\right) + \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0$$

Logo,

$$\langle x, z_0 \rangle = 0 + \frac{f(x)}{f(z_0)}\langle z_0, z_0 \rangle = \frac{f(x)}{f(z_0)}\|z_0\|^2 \Rightarrow f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0 \right\rangle$$

Tomemos $z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0$. Então

$$f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0 \right\rangle \Rightarrow f(x) = \langle x, z \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Vamos ver a unicidade de z: suponha $f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

Desse modo,

$$\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0 \forall x \in \mathcal{H} \Rightarrow \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = 0 \Rightarrow \|z_1 - z_2\|^2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$$

$\square$

Exemplo 94. Seja $\mathcal{H} = \ell_2$. Considere a sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell_2$, dada por $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Considere o operador

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\alpha & : & \ell_2 & \longrightarrow & K \\ & & (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \longmapsto & \varphi_\alpha(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \end{array}$$

Temos nesse caso que $\varphi_\alpha(x) = \langle x, \alpha \rangle$, e $\|\varphi_\alpha\| = \|\alpha\|$.

Corolário 21. Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Demonstração. Tome $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Seja $\pi \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{**}$ a imersão canônica. Dado $f \in \mathcal{H}^*$, existe um único $z \in \mathcal{H}$ tal que $f = \varphi_z(x)$ (lembramos aqui que $\varphi_z(x) = \langle x, z \rangle$).

Definamos em $\mathcal{H}^*$ o produto interno

$$\langle \varphi_y, \varphi_z \rangle_1 = \langle z, y \rangle$$

(Porquê não funciona para $\langle y, z \rangle$?)

Em particular,

$$\langle \varphi_y \varphi_y \rangle_1 = \langle y, y \rangle = \|y\|^2 = \left\|\varphi_y\right\|^2.$$

Assim, a norma em $\mathcal{H}^*$ é a mesma norma que a induzida por $\langle , \rangle_1$.

Sendo $\mathcal{H}^*$ completo, então $(\mathcal{H}^*, \langle , \rangle_1)$ é um espaço de Hilbert.

Seja $\psi \in \mathcal{H}^{**}$. Pelo Teorema de Riesz, existe um único $g \in \mathcal{H}^*$ tal que

$$\psi(f) = \langle f, g \rangle_1 \quad \forall f \in \mathcal{H}^*$$

Seja $z \in \mathcal{H}$ tal que $g = \varphi_z$. Dado $f \in \mathcal{H}^*$, então $f = \varphi_y$. Daí:

$$\psi(f) = \langle f, g \rangle_1 = \langle \varphi_y, \varphi_z \rangle_1 = \langle z, y \rangle = \varphi_y(z) = f(z) = (\pi(z))(f)$$

Consequentemente,

$$\psi(f) = (\pi(z))(f) \qquad \forall f \in \mathcal{H}^*$$

Logo, $\psi = \pi(z)$. Assim, π é sobrejetora. Portanto, $\mathcal{H}$ é reflexivo. □

Lema 10. Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert, e $T \colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ linear. Então:

$$T \text{ é contínua } \Leftrightarrow \sup_{\substack{x\in S_{\mathcal{H}_1} \\ y\in S_{\mathcal{H}_2}}} \left|\langle T(x), y \rangle\right| < \infty$$

onde lembramos que

$$S_{\mathcal{H}} = \{x \in \mathcal{H} | \|x\| = 1\}.$$

Nesse caso,

$$\|T\| = \sup \left|\langle T(x), y \rangle\right|$$

Em particular,

$$T = 0 \Leftrightarrow \langle T(x), y \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha T contínua. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\langle T(x), y\rangle\right| \leq \left\|T(x)\right\|\|y\| \leq \|T\|\|x\|\|y\| = \|T\| \text{ se } x \in S_{\mathcal{H}_1}, y \in S_{\mathcal{H}_2}$$

($\Leftarrow$) Seja $x \in \mathcal{H}_1$, com $T(x) \neq 0$. Então

$$\sup_{y \in S_{\mathcal{H}_2}} \left|\langle T(x), y\rangle\right| \geq \left|T(x), \frac{T(x)}{\left\|T(x)\right\|}\right| = \frac{1}{\left\|T(x)\right\|}\left|T(x), T(x)\right| = \frac{\left\|T(x)\right\|^2}{\left\|T(x)\right\|} = \left\|T(x)\right\|$$

Por outro lado,

$$\left|\langle T(x), y\rangle\right| \leq \left\|T(x)\right\|\|y\| = \left\|T(x)\right\|, \quad \forall y \in S_{\mathcal{H}_2}$$

Assim,

$$\sup_{y \in S_{\mathcal{H}_2}} \left|\langle T(x), y\rangle\right| = \left\|T(x)\right\|, \forall x \in \mathcal{H}_1$$

Então

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{H}_1}} \left(\sup_{y \in S_{\mathcal{H}_2}} \left|T(x), y\rangle\right|\right) = \sup_{x \in S_{\mathcal{H}_1}} \left\|T(x)\right\| = \|T\|$$

Portanto, concluímos que

$$\sup_{\substack{x \in S_{\mathcal{H}_1} \\ y \in S_{\mathcal{H}_2}}} \left|\langle T(x), y\rangle\right| < \infty$$

$\square$

Teorema 39. Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert, e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então existe um única transformação liner contínua $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, \forall\, y \in \mathcal{H}_2.$$

Além disso,

$$\left\|T^*\right\| = \|T\|.$$

Demonstração. Seja $y \in \mathcal{H}_2$. Definamos

$$\begin{array}{rccl} \lambda_y & : \mathcal{H}_1 & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & \lambda_y(x) = \langle T(x), y\rangle \end{array}$$

Note que λ_y é linear e contínua.

Pelo Teorema de Riesz, $\exists!\ z \in \mathcal{H}_1$ tal que $\lambda_y(x) = \langle x, z\rangle$. Portanto,

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, z\rangle\ \forall x \in \mathcal{H}_1$$

Definamos $T^*(y) = z$ como o único $z \in \mathcal{H}_1$ satisfazendo as condições acima.

Assim,

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, z\rangle \Rightarrow \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \qquad \forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2$$

Uma verificação rotineira mostra que T^* é linear: sejam $y_1, y_2 \in \mathcal{H}_2$, e $\alpha \in K$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(y_1 + \alpha y_2)\rangle &= \langle T(x), y_1 + \alpha y_2\rangle \\
&= \langle T(x), y_1\rangle + \overline{\alpha}\langle T(x), y_2\rangle \\
&= \langle x, T^*(y_1)\rangle + \overline{\alpha}\langle x, T^*(y_2)\rangle \\
&= \langle x, T^*(y_1) + \overline{\alpha}T^*(y_2)\rangle
\end{aligned}$$

Segue da unicidade do Teorema de Riesz e da definição de T^* que

$$T * (y_1 + \alpha y_2) = T^*(y_1) + \overline{\alpha}T^*(y_2)$$

Resta verificar a continuidade de T^*. Temos que

$$\left|\langle T^*(y), x\rangle\right| = \left|\overline{\langle x, T^*(y)\rangle}\right| = \left|\langle T(x), y\rangle\right| \ \forall\ x \in \mathcal{H}_1,\ \forall\ y \in \mathcal{H}_2$$

Assim,

$$\sup_{\substack{x \in S_{\mathcal{H}_1} \\ y \in S_{\mathcal{H}_2}}} \left|\langle T^*(y), x\rangle\right| = \sup_{\substack{x \in S_{\mathcal{H}_1} \\ y \in S_{\mathcal{H}_2}}} \left|\langle T(x), y\rangle\right| = \|T\|$$

Segue do lema 10 que T^* é contínua e $\|T^*\| = \|T\|$. $\square$

Definição 111. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ linear entre espaços de Hilbert. O operador $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ obtido do teorema anterior é chamado de *Hilbert adjunto* de T, isto é, o único $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

Observação 32. Denotemos por T^{adj} o adjunto de T, ou seja, $T^{\text{adj}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2^*, \mathcal{H}_1^*)$.

$$(T^{\text{adj}}(\varphi_y))(x) = \varphi_y(T(x)) = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \varphi_{T^*(y)}(x)$$

Então $T^{\text{adj}}(\varphi_y) = \varphi_{T^*(y)}$.

A partir de agora, entre espaços de Hilbert, o adjunto será o Hilbert adjunto T^*.

Exemplo 95. Considere $\mathbb{C}^n$, identificado com $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Seja $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, e considere $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ tal que $T = T_A$ e $Tx = Ax$. Dados x e y, definimos o produto interno como

$$\langle x, y\rangle = x^T\overline{y} = \operatorname{Tr}\left\{x^T\overline{y}\right\}$$

Para todo $x \in \mathbb{C}^n$ e $z \in \mathbb{C}^m$, temos que

$$\langle T_A x, z\rangle = \langle Ax, z\rangle = (Ax)^T\overline{z} = x^T A^T\overline{z} = x^T\overline{\overline{A}^T z} = \langle x, T_{\overline{A}^T} z\rangle \Rightarrow T_A^* = T_{\overline{A}^T},$$

ou seja, $A^* = \overline{A}^T$.

Exemplo 96 (Operador Diagonal)**.** Seja $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, e considere

$$\begin{array}{rrcl} T_a & : \quad \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Temos que $\|T_a\| = \|a\|_\infty$. Além disso,

$$\langle T_a(x), y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\overline{a_n} y_n} = \langle x, T_{\overline{a}}(y)\rangle$$

Logo, $T_a^* = T_{\overline{a}}$.

Exemplo 97 (Shift)**.** Considere o operador $R\colon \ell_2 \to \ell_2$, que leva um elemento $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$ em $R(x) = (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$. A norma de R é $\|R\| = 1$, e $\big\|R(x)\big\|_2 = \|x\|$.

O adjunto $R^*\colon \ell_2 \to \ell_2$ é tal que, para $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots)$, leva-se em $R^*(y) = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$.

Observe que $R^* \circ R = Id$.

Exemplo 98 (Operador Integral)**.** Seja $\kappa\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ tal que $\kappa \in L^2([0,1]\times[0,1])$. Considere o operador

$$\begin{array}{rrcl} T_\kappa & : \quad L^2([0,1]\times[0,1]) & \longrightarrow & L^2([0,1]\times[0,1]) \\ & f & \longmapsto & T_\kappa(f) = \int_0^1 \kappa(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \end{array}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \big\|T_\kappa(f)\big\|_2^2 &= \int_0^1 \big|T_\kappa(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left|\int_0^1 \kappa(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \Big|\langle \kappa(x,\cdot), \overline{f}\rangle\Big|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \big|\kappa(x,y)\big|^2 \,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 \big|\overline{f}(y)\big|^2 \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= \|f\|_2^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \big|\kappa(x,y)\big|^2 \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= \|f\|_2^2 \|\kappa\|_{L^2([0,1]\times[0,1])} \end{aligned}$$

Logo, T_κ é contínua, e

$$\|T_\kappa\| \leq \|\kappa\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}.$$

Além disso, $T_\kappa^* = T_{\kappa^*}$, onde $\kappa^*(x,y) = \overline{\kappa(y,x)}$.

Exemplo 99 (Operador de Volterra)**.** Seja o espaço de Banach $\mathcal{C}([0,1])$ dotado da norma do supremo $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \big|f(x)\big|$. Considere o operador

$$\begin{array}{rcccl} V & : & \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1]) \\ & & f & \longmapsto & V(f) \end{array},$$

onde

$$(V(f))(t) = \int\limits_0^t f(y)\,\mathrm{d}y.$$

chamado *operador de Volterra.* Temos que

$$\big\|(V(f))(x)\big\| \leq \|f\|_\infty x$$

Além disso, é possível mostrar também que

$$\big|(V^n(f))(x)\big| \leq \|f\|_\infty \frac{x^n}{n!}, \quad \forall\ n\ \in \mathbb{N}$$

de onde concluímos que

$$\big\|V^n(f)\big\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{n!} \Rightarrow \big\|V^n(f)\big\| \leq \frac{1}{n!}$$

Logo, temos que $\|V\| \leq 1$. Mas para a função constante $f(x)=1$, temos que $(V(f))(x) = x$. Logo $\big\|V(f)\big\|_\infty = 1$, e segue que $\|V\| \geq 1$, provando que $\|V\| = 1$.

Considerando

$$\begin{array}{rcccl} V & : & \mathcal{C}([a,b]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([a,b]) \\ & & f & \longmapsto & V(f) \end{array},$$

onde

$$(V(f))(t) = \int\limits_a^t f(y)\,\mathrm{d}y,$$

podemos escrever explicitamente para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(V^n(f))(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\,\mathrm{d}s$$

Além disso,

$$\|V^n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}(b-a)^n, \quad \forall\ n\ \in \mathbb{N}$$

Vamos explorar algumas propriedades dos operadores adjuntos em espaços de Hilbert.

Proposição 120. Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert, $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Então, são válidas as seguintes propriedades:

1. $\langle T^*(y), x\rangle = \langle y, T(x)\rangle, \forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$.
2. $(S+T)^* = S^* + T^*$
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
4. $(UT)^* = T^* U^*$
5. $T^{**} = T$
6. $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

Demonstração. • Por definição, temos que

$$\langle T(T^*(y)), T(x)\rangle = \langle T^*(y), T^*(T(x))\rangle \Rightarrow \langle y, T(x)\rangle = \langle T^*(y), x\rangle.$$

- Novamente, por definição:

  $\langle x, (S+T)^*(y)\rangle = \langle (S+T)(x), y\rangle = \langle S(x), y\rangle + \langle T(x), y\rangle = \langle x, S^*(y)\rangle + \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, (S^*+T^*)(y)\rangle$

  Logo, $(S+T)^* = S^* + T^*$.

- Temos
  $$\langle x, (\alpha T)^*(y)\rangle = \langle (\alpha T)(x), y\rangle = \overline{\alpha}\langle T(x), y\rangle = \overline{\alpha}\langle (x, T^*(y)\rangle$$
  Logo, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

- Temos

  $\langle x, (UT)^*(y)\rangle = \langle (UT)(x), y\rangle = \langle U(T(x)), y\rangle = \langle T(x), U^*(y)\rangle = \langle x, T^*(U^*(y))\rangle = \langle x, (T^*U^*)(y)\rangle$

  Logo, $(UT)^* = T^*U^*$.

- Temos

  $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle T^{**}(x), y\rangle \Rightarrow \langle (T - T^{**})(x), y\rangle = 0 \Rightarrow T - T^{**} = 0 \Rightarrow T = T^{**}$.

- Temos que

  $$\left\|T^*T\right\| = \sup_{x,y \in S_{\mathcal{H}_1}} \left|\langle (T^*T)(x), y\rangle\right| = \sup_{x,y \in S_{\mathcal{H}_1}} \left|\langle T(x), T(y)\rangle\right| = \sup_{x,y \in S_{\mathcal{H}_1}} \left\|T(x)\right\|^2 = \|T\|^2$$

□

Definição 112. Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Dizemos que uma isometria T é *antilinear* se para todo $\alpha \in K$, temos que

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$$

Exemplo 100. Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Então

$$\begin{array}{rcrcl} * & : & \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) \\ & & T & \longmapsto & T^* \end{array}$$

é uma isometria antilinear, pois

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$$

Proposição 121. Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. Então:

1. $\mathrm{Ker} T = (\mathrm{Im}\, T^*)^{\perp}$
2. $\mathrm{Ker} T^* = (\mathrm{Im}\, T)^{\perp}$

Demonstração. 1. Temos

$$\begin{array}{rcl} x \in \mathrm{Ker} T & \Leftrightarrow & T(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \langle T(x), y\rangle = 0 \forall\ y \in \mathcal{H}_2 \\ & \Leftrightarrow & \langle x, T^*(y)\rangle = 0 \forall\ y \in \mathcal{H}_2 \\ & \Leftrightarrow & x \in (\mathrm{Im}\, T^*)^{\perp} \end{array}$$

2. Usando o item 1 provado acima e o fato de que $T^{**} = T$ da proposição 120, temos que:

$$\mathrm{Ker} T^* = (\mathrm{Im} (T^*)^*)^{\perp} = (\mathrm{Im}\, T)^{\perp} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Ker} T^* = (\mathrm{Im}\, T)^{\perp}}$$

□

Teorema 40 (Hellinger-Toeplitz)**.** Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ uma aplicação linear tal que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$$

para todos $x, y \in \mathcal{H}$. Então T é limitado.

Demonstração. Usaremos que $\mathcal{G}(T)$ é fechado, e usaremos o Teorema do Gráfico Fechado. Suponha que $(x_n, T(x_n))$ converge a (x, y) em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Vamos mostrar que $y = T(x)$. Seja $z \in \mathcal{H}$. Por hipótese e pela continuidade do produto interno, temos que

$$\langle z, y\rangle = \left\langle z, \lim_{n\to\infty} T(x_n)\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, T(x_n)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T(z), x_n\rangle =$$

$$\left\langle T(z), \lim_{n\to\infty} x_n\right\rangle = \langle T(z), x\rangle = \langle z, T(x)\rangle$$

Assim, para todo $z \in \mathcal{H}$, vale $\langle z, y - T(x)\rangle = 0$, o que só é possível se $y = T(x)$. Logo, T é limitado.

□

9.9 Classe de operadores em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

A partir de agora, utilizaremos a notação $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Definição 113. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dizemos que

(i) T é *auto-adjunto* (também chamado Hermitiano, ou simétrico) se

$$T^* = T$$

(ii) T é *unitário* se

$$TT^* = T^*T = I$$

(iii) T é *normal* se

$$TT^* = T^*T$$

Observação 33. T é auto-adjunto se e somente se

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Observação 34. Operadores auto-adjuntos e unitários são normais.

Observação 35. T é unitário se e somente T é inversível e $T^{-1} = T^*$.

Exemplo 101. Comecemos com um exemplo familiar em dimensão finita. Seja

$$\begin{array}{rcrcl} T & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array}$$

Este operador é auto-adjunto. De fato:

$$\begin{array}{rcl} \langle (a, b), T(x, y)\rangle & = & \langle (a, b), (x + y, x - y)\rangle \\ & = & a(x + y) + b(x - y) \\ & = & x(a + b) + y(a - b) \\ & = & \langle (a + b, a - b), (x, y)\rangle \\ & = & \langle T(a, b), (x, y)\rangle \end{array}$$

Logo, $T^*(a, b) = (a + b, a - b)$, e $T = T^*$. POde-se verificar também que $T^{-1}(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ é a inversa de T.

Exemplo 102. Considere $T_a \colon \ell_2 \to \ell_2$ o operador diagonal apresentado em 96. Este operador é

- normal;
- auto-adjunto se e somente se $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;
- unitário se e somente se $|a_n| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Exemplo 103. Considere $R\colon \ell_2 \to \ell_2$ o operador shift apresentado em 9.8. Este operador não é normal. Veja que $R^*R = Id$, enquanto que, para $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$

$$R(R^*(x)) = R(R^*(x_1, x_2, x_3, \ldots)) = R(x_2, x_3, \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots) \neq (x_1, x_2, x_3, \ldots) = Id(x)$$

Exemplo 104. O operador integral $T_\kappa\colon L^2([0,1] \times [0,1]) \to L^2([0,1] \times [0,1])$ apresentado em 98 é auto-adjunto, pois $\kappa(x,y) = \overline{\kappa(x,y)}$, e

$$T_\kappa^* = T_{\kappa^*} = T_{\overline{\kappa}} = T_\kappa$$

Proposição 122. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador auto-adjunto. Então

$$\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

Demonstração. Para mostrar que certo $z \in \mathbb{C}$ é real, basta verificar que $\overline{z} \in \mathbb{C}$. Sendo T auto-adjunto,

$$\langle T(x), x\rangle = \langle x, T^*(x)\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle} \Rightarrow \langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$$

□

Proposição 123. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathcal{H}$. Então T é auto-adjunto.

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{H}$. Temos que

$$\langle T(x), x\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle} = \overline{\langle x, T^*(x)\rangle} = \langle T^*(x), x\rangle \Rightarrow \langle (T - T^*)(x), x\rangle = 0\ \forall x \in \mathcal{H}$$

Como $\mathcal{H}$ é sobre $\mathbb{C}$, temos que $T = T^*$. □

Proposição 124. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Defina

$$\mathscr{A}(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : T^* = T\},$$

ou seja, $\mathscr{A}(\mathcal{H})$ é o conjunto dos operadores auto-adjuntos em $\mathcal{H}$.

Então, $\mathscr{A}(\mathcal{H})$ é fechado em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Demonstração. Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}(\mathcal{H})$ que converge a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Então:

$$\left\|T_n^* - T^*\right\| = \left\|(T_n - T)^*\right\| = \|T_n - T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Logo, $T_n^* \to T^*$. Como $T_n^* = T_n$, obtemos $T = T^*$. □

Proposição 125. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador auto-adjunto. Então

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \left|\langle T(x), x\rangle\right|$$

Demonstração. Seja
$$M = \sup_{\|x\|=1} \big|\langle T(x), x\rangle\big|$$
Se $\|x\| = 1$, então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,
$$\big|\langle T(x), x\rangle\big| \leq \big\|T(x)\big\|\|x\| = \|T\| \Rightarrow M \leq \|T\|$$
Por outro lado, sejam $\|x\| = \|y\| = 1$. Então
$$\begin{aligned}\langle T(x+y), x+y\rangle &= \langle T(x), x\rangle + \langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle + \langle T(y), y\rangle\\ &= \langle T(x), x\rangle + \langle T(x), y\rangle + \langle y, T^*(x)\rangle + \langle T(y), y\rangle\\ &= \langle T(x), x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle T(x), y\rangle + \langle T(y), y\rangle\end{aligned}$$
Analogamente, concluímos que
$$\langle T(x-y), x-y\rangle = \langle T(x), x\rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle T(x), y\rangle + \langle T(y), y\rangle$$
Podemos então concluir que
$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\langle T(x), y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x), x\rangle - \langle T(y), y\rangle\\ 2\,\mathrm{Re}\langle T(x), y\rangle = \langle T(x), x\rangle + \langle T(y), y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\end{cases}$$
Somando as duas identidades, obtemos
$$2\,\mathrm{Re}\langle T(x), y\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle T(x), y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \cancel{\langle T(x), x\rangle} - \cancel{\langle T(y), y\rangle} +$$
$$\cancel{\langle T(x), x\rangle} + \cancel{\langle T(y), y\rangle} - \langle T(x-y), x-y\rangle \Rightarrow$$
$$4\,\mathrm{Re}\langle T(x), y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle$$
Assim, utilizando a Lei do Paralelogramo:
$$\begin{aligned}4\,\mathrm{Re}\langle T(x), y\rangle &= \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\\ &\leq \big|\langle T(x+y), x+y\rangle\big| + \big|\langle T(x-y), x-y\rangle\big|\\ &\leq M\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)\\ &= M\left(2\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\\ &= 2M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\\ &= 2M\left(1^2 + 1^2\right)\\ &= 4M\end{aligned}$$
Seja θ tal que
$$\langle T(x), y\rangle = e^{i\theta}\big|\langle T(x), y\rangle\big|$$
Então
$$\big|\langle T(x), y\rangle\big| = e^{-i\theta}\langle T(x), y\rangle = \left\langle T\left(e^{-i\theta}x\right), y\right\rangle = \mathrm{Re}\left\langle T\left(e^{-i\theta}x\right), y\right\rangle \leq M$$

Logo $\big|\langle T(x), y\rangle\big| \leq M$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$. Pelo lema 10, temos que

$$\sup_{\substack{x \in S_{\mathcal{H}_1} \\ y \in S_{\mathcal{H}_2}}} \big|\langle T(x), y\rangle\big| < M \Rightarrow \|T\| \leq M$$

Portanto, $\|T\| = M$. □

Proposição 126. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Então são equivalentes:

(i) T é normal;

(ii) $\big\|T(x)\big\| = \big\|T^*(x)\big\| \ \forall \ x \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Notemos primeiramente o seguinte: se $x \in \mathcal{H}$, então

$$\big\|T(x)\big\|^2 - \big\|T^*(x)\big\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle - \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = \langle (T^*T - TT^*)(x), x\rangle$$

Chamemos $S = T^*T - TT^*$.
(i) $\Rightarrow$ **(ii)** : Se T é normal, então $S = 0$. Logo,

$$\langle S(x), x\rangle = 0 \Rightarrow \big\|T(x)\big\|^2 - \big\|T^*(x)\big\|^2 = 0 \Rightarrow \big\|T(x)\big\| = \big\|T^*(x)\big\| \quad \forall \ x \in \mathcal{H}$$

(ii) $\Rightarrow$ **(i)** : Se $\big\|T(x)\big\| = \big\|T^*(x)\big\|$, então

$$\big\|T(x)\big\|^2 - \big\|T^*(x)\big\|^2 = \langle S(x), x\rangle \Rightarrow \langle S(x), x\rangle = 0$$

Como S é auto-adjunto, pois

$$S^* = (T^*T - TT^*)^* = (T^*T)^* - (TT^*)^* = T^*T^{**} - T^{**}T^* = T^*T - TT^* = S,$$

segue da proposição anterior que $\|S\| = 0$. Logo,

$$T^*T - TT^* = 0 \Rightarrow T^*T = TT^* \Rightarrow \boxed{T \text{ é normal}}$$

□

Proposição 127. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) T é isometria, ou seja $\|x\| = \big\|T(x)\big\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$;

(ii) $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$; para todos $x, y \in \mathcal{H}$;

(iii) $T^*T = Id$.

Demonstração. **(i) $\Rightarrow$ (ii)** : Já foi feito.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Se $x, y \in \mathcal{H}$, então

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle T^*(T(x)), y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$$

Logo,

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle T^*(T(x)), y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle \Rightarrow \langle T^*T(x), y\rangle - \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow T^*T(x) = x$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) : se $T^*T = Id$, o resultado é trivial. □

Proposição 128. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) T é unitário;

(ii) T é isometria sobrejetora.

Demonstração. **(i) $\Rightarrow$ (ii)** : Suponha T unitário. Então $TT^* = Id$, o que implica que T é sobrejetora. Além disso, $TT^* = Id$ implica que T é uma isometria pela proposição anterior.

Portanto, T é isometria sobrejetora.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Da proposição anterior, sendo T isometria, $T^*T = Id$. Sendo T sobrejetora, T^{-1} é isometria sobrejetora. Da proposição anterior:

$$Id = (T^{-1})^*(T^{-1}) = (T^*)^{-1}(T)^{-1} = (TT^*)^{-1} \Rightarrow TT^* = Id$$

Portanto, T é unitário. □

9.10 Operadores Idempotentes

Definição 114. Um operador $E \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é chamado *idempotente* se $E = E^2$.

Exemplo 105. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, e F subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Então, a projeção ortogonal $p_F(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é tal que $p_F^2 = p_F$, pois sendo $x = f + g$, com $f \in F$ e $g \in F^\perp$, temos

$$p_F(p_F(x)) = p_F(p_F(f+g)) = p_F(f) = f$$

Note que $\text{Ker}(p_F) = F^\perp$ e $\text{Im}(p_F) = F$.

Exemplo 106. Seja $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, e considere $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ representada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{array}{rccl} T & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x,x) \end{array}$$

Observe que $T^2 = T$, pois

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que T não pe uma projeção ortogonal. Além disso,

$$\mathrm{Ker}T = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathrm{Im}\, T = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

Veja que $\mathrm{Ker}T \neq (\mathrm{Im}\, T)^{\perp}$, diferentemente do caso anterior.

Exemplo 107. Seja $\kappa(x, y) = e^{2i\pi(x-y)}$ para $(x, Y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Então, o correspondente operador integral

$$\begin{array}{rcccl} T_\kappa & : & L^2([0,1] \times [0,1]) & \longrightarrow & L^2([0,1] \times [0,1]) \\ & & f & \longmapsto & T_\kappa(f) = \int\limits_0^1 e^{2i\pi(x-y)} f(y)\, \mathrm{d}y \end{array}$$

é idempotente. De fato, observando que

$$\kappa(x, y) = e^{2i\pi(x-y)} = 2(\cos\big(\pi(x-y)\big) + i\mathrm{sen}(\pi(x-y))),$$

temos

$$T_\kappa(f) = 2 \int\limits_0^1 (\cos\big(\pi(x-y)\big) + i\mathrm{sen}(\pi(x-y))) f(y)\, \mathrm{d}y = 2 \left(\int\limits_0^1 (\cos\big(\pi(x-y)\big) f(y)\, \mathrm{d}y + i \int\limits_0^1 (\mathrm{sen}(\pi(x-y)) f(y$$

Proposição 129. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $E \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Então:

(i) E é idempotente se e somente se $Id - E$ é idempotente;

(ii) Se E é idempotente,

$$\mathrm{Im}\, E = \mathrm{Ker}(Id - E)$$

$$\mathrm{Ker}(E) = \mathrm{Im}(Id - E)$$

(iii) Se E é idempotente, então

$$\mathcal{H} = \mathrm{Ker}E \oplus \mathrm{Im}\, E,$$

no sentido de soma direta topológica.

Demonstração. **(i)** Temos que:

$$(Id - E)^2 = Id - E \Leftrightarrow Id - 2E + E^2 = Id - E \Rightarrow -E + E^2 = 0 \Rightarrow E^2 = E$$

(ii) Seja E idempotente. Então $\text{Ker}(Id - E) \subseteq \text{Im}(E)$, pois

$$0 = (Id - E)(x) \Rightarrow E(x) = Id(x) = x$$

Seja $x \in \text{Im}\, E$. Então $x = E(y)$ para algum $y \in \mathcal{H}$.

Logo,
$$E(x) = E^2(y) = E(y) = x \Rightarrow x \in \text{Ker}(Id - E)$$

Portanto, $\text{Ker}(Id - E) = \text{Im}(E)$.

Como $Id - E$ é idempotente, pela igualdade anterior temos que

$$\text{Ker}(Id - (Id - E)) = \text{Im}((Id - E)) \Rightarrow \text{Ker}(E) = \text{Im}(Id - E).$$

(iii) Seja $x \in \text{Ker}E \cap \text{Im}\, E$. Se $x \in \text{Im}\, E$, então $E(x) = x$. Mas se $x \in \text{Ker}e$, então $x = 0$.

Seja $x \in \mathcal{H}$. Temos que
$$x = E(x) + (x - E(x))$$

onde $E(x) \in \text{Im}\, E$ e $x - E(x) \in \text{Ker}E$, pois

$$E(x - E(x)) = E(x) - E^2(x) = 0$$

Logo, $\mathcal{H} = \text{Ker}E \oplus \text{Im}\, E$.

□

Existem exemplos de tranformações idempotentes que não são contínuas, como o abaixo:

Exemplo 108. Encontrar

Observação 36. Provamos como aplicação do Teorema da Aplicação Aberta que para $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, F, G subespaços fechados de $\mathcal{H}$ tais que $\mathcal{H} = F \oplus G$. Então existe $E \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ idempotente tal que $F = \text{Ker}E$ e $G = \text{Im}\, E$.

Lema 11. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $E \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ idempotente. Seja $M = \text{Im}\, E$. Então E é a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M se e somente se $\text{Ker}E = (\text{Im}\, E)^\perp = M^\perp$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $E = p_M$, então obviamente $\text{Ker}E = M^\perp$.
($\Leftarrow$) Seja $x \in \mathcal{H}$. Então

$$x - E(x) \in \text{Im}(Id - E) = \text{Ker}E = M^\perp$$

Logo $x - E(x) \in M^\perp$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Assim, $E = p_M$. □

Proposição 130. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $E \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ idempotente, com $E \neq 0$. Seja $M = \text{Im}\, E$. Então E é projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M se e somente se $\|E\| = 1$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sendo E idempotente,

$$\|E\| = \left\|E^2\right\| \leq \|E\|^2 \Rightarrow \|E\| \geq 1.$$

Se $E = p_M$, seja $x \in \mathcal{H}$, e escreva $x = E(x) + z$, com $z \in M^\perp$. Então

$$\|x\|^2 = \left\|E(x)\right\|^2 + \|z\|^2 \geq \left\|E(x)\right\|^2$$

Logo, $\left\|E(x)\right\| \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Assim, $\|E\| \leq 1$.

Concluímos que $\|E\| = 1$.

($\Leftarrow$) Seja E idempotente, com $\|E\| = 1$. Pela proposição anterior, é suficiente provar que $\operatorname{Im} E = (\operatorname{Ker} E)^\perp$.

($\supseteq$) Seja $x \in (\operatorname{Ker} E)^\perp$. Como $x - E(x) \in \operatorname{Ker}(E)$,

$$0 = \langle x - E(x), x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle E(x), x\rangle \Rightarrow \langle x, x\rangle = \langle E(x), x\rangle$$

Então

$$\|x\|^2 = \langle E(x), x\rangle = \left|\langle E(x), x\rangle\right| \leq \left\|E(x)\right\|\|x\| \leq \|x\|^2 \Rightarrow \|x\| \leq \left\|E(x)\right\| \leq \|X\| \Rightarrow \left\|E(x)\right\| = \|x\|.$$

Logo

$$\left\|x - E(x)\right\|^2 = \langle x - E(x), x - E(x)\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, E(x)\rangle - \langle E(x), x\rangle + \langle E(x), E(x)\rangle =$$

$$\langle x, x - E(x)\rangle - \langle E(x), x - E(x)\rangle = -(\langle E(x), x\rangle - \langle E(x), E(x)\rangle) = -(\|x\|^2 - \left\|E(x)\right\|^2) = -(\|x\|^2 - \|x\|^2) = 0$$

Portanto, $x \in \operatorname{Im} E$. Logo, $(\operatorname{Ker} E)^\perp \subseteq \operatorname{Im} E$.

($\subseteq$) Seja $x \in \operatorname{Im} E$. Escrevamos $x = y + z$, com $y \in \operatorname{Ker} E$, $z \in (\operatorname{Ker} E)^\perp$. Da inclusão anterior, $z \in \operatorname{Im} E$.

$$x = E(x) = E(y + z) = E(y) + E(z) = E(z) = z$$

Logo, $x = z \in (\operatorname{Ker} E)^\perp$, o que implica $\operatorname{Im} E \subseteq (\operatorname{Ker} E)^\perp$.

Portanto, $\operatorname{Im} E = (\operatorname{Ker} E)^\perp$.

$\square$

9.11 Operadores Compactos

Definição 115. Seja X um espaço métrico e $A \subseteq X$.

- ♣ Dizemos que A é *totalmente limitado* se para cada $\varepsilon > 0$, existem $x_1, \ldots, x_m \in A$ tais que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i; \varepsilon)$$

♥ A é dito *relativamente compacto* se $\overline{A}$ é compacto.

♠ A é dito *sequencialmente compacto* se qualquer sequência em A possui uma subsequência convergente.

♦ A é dito *localmente compacto* se todo ponto admite uma vizinhança compacta.

Exemplo 109. O conjunto $(0,1)$ é relativamente compacto em $\mathbb{R}$, pois $\overline{(0,1)} = [0,1]$ que é compacto, pois é fechado e limitado.

A proposição seguinte caracteriza os conjuntos relativamente compactos em espaços de sequências generalizados.

Proposição 131. Seja $\mathcal{A} = \{a^i\}_{i\in I} \subset \ell_p$. Então

Proposição 132. Sejam X espaço métrico e $A \subseteq X$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A é relativamente compacto;

(ii) A está contido num compacto de X;

(iii) Toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos em A possui uma subsequência convergente a um ponto de X;

(iv) A é totalmente limitado e $\overline{A}$ é completo.

Demonstração. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** Claramente, temos que $A \subseteq \overline{A}$, que é compacto em X por definição.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Sendo A contido num compacto e X um espaço métrico, então A é sequencialmente compacto.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** Suponha por absurdo que A não seja totalmente limitado. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que não existem $x_1, \ldots, x_m \in A$ tais que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i; \varepsilon).$$

Indutivamente, podemos construir uma seqêcnia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A tal que $x_n \notin B(x_i; \varepsilon)$, para $i \neq n$, isto é, $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, para $i \neq j$.

Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não admite uma subsequência convergente, absurdo.

(iv) $\Rightarrow$ **(i)** Observe que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de um conjunto totalmente limitado, então ela possui uma subsequência de Cauchy.

Como A é totalmente limitado, dado $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, seja $D_n \subseteq A$ finito, tal que

$$A \subseteq \bigcup_{x\in D_n} B\left(x; \frac{1}{2^n}\right)$$

Seja $y_0 \in D_0$ tal que

$$A_0 = \{n \in \mathbb{N} | x_n \in B(y_0; 1)\}$$

é infinito.

Seja $y_1 \in D_1$ tal que

$$A_0 = \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| x_n \in B\left(y_1; \frac{1}{2}\right) \right\}$$

é infinito.

Dessa forma, se $A_k \subseteq \mathbb{N}$ é infinito, seja $y_{k+1} \in D_{k+1}$, tal que

$$A_{k+1} = \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| x_n \in B\left(y_{k+1}; \frac{1}{2^{k+1}}\right) \right\}$$

é infinito.

Tomemos uma sequência crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de naturais tal que $x_{n_k} \in A_k$. Então $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. □

Definição 116. Sejam X e Y espaços normados e $T\colon X \to Y$ linear. Dizemos que T é *compacto* se $T(B_X)$ é relativamente compacto em Y, isto é, $\overline{T(B_X)}$ é compacto.

Lema 12. Sejam X e Y espaços normados e $T\colon X \to Y$ aplicação linear. São equivalentes:

(i) T é compacto;

(ii) $T(B_X)$ está contido num compacto de Y;

(iii) $T(M)$ é relativamente compacto para todo $M \subseteq X$ limitado.

(iv) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X, $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente.

Demonstração. Todas as implicações decorrem diretamente da proposição 132. □

Observação 37. Se $\dim(X) = \infty$, então $Id\colon X \to X$ não é compacto.

Como notação, adotaremos

$$\mathcal{K}(X, Y) = \{T\colon X \to Y | T \text{ é linear e compacto.}\}$$

Proposição 133. Sejam X, Y e Z espaços normados. Então:

(i) $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$;

(ii) $\mathcal{K}(X, Y)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X, Y)$;

(iii) Se Y é espaço de Banach, então $\mathcal{K}(X, Y)$ é fechado em $\mathcal{L}(X, Y)$;

(iv) Se $S \in \mathcal{L}(Z, X)$, $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$ e $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, então $R \circ T$ e $T \circ S$ são compactos, ou seja, $\mathcal{K}(X, Y)$ é um ideal bilateral.

Demonstração. **(i)** Seja $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Então, $\overline{T(B_X)}$ é compacto em Y. Em particular, $\overline{T(B_X)}$ é limitado. Consequentemente, existe $c > 0$ tal que

$$\overline{T(B_X)} \subseteq \{y \in Y : \|y\| \leq c\}$$

Daí, $\|T(x)\| \leq c$ para todo $x \in B_X$. Portanto, T é contínua. Logo, $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$.

(ii) Observe que $0 \in \mathcal{K}(X, Y)$. Sejam $T, U \in \mathcal{K}(X, Y)$ e $\alpha \in K$. Vamos mostrar que $T + \alpha U \in \mathcal{K}(X, Y)$. Consideremos uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em X. Como T é compacto, seja $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(T(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. Tomemos a mesma subsequência tal que $(U(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Logo, $((T + \alpha U)(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. Portanto $T + \alpha U \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(iii) Suponhamos Y de Banach. Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de operadores em $\mathcal{K}(X, Y)$ convergente a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Utilizando a implicação **(iv)** $\Rightarrow$ **(i)** da proposição 132, vamos verificar que $T(B_X)$ é completo e totalmente limitado, o que vai implicar T compacto.

Como Y é um espaço de Banach, claramente $\overline{T(B_X)}$ é completo. Provemos que $T(B_X)$ é totalmente limitado.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0$$

Comoo T_{n_0} é compacto, então existem $x_1, \ldots x_m \in B_X$ tais que

$$T_{n_0}(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B\left(T_{n_0}(x_i); \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Seja $x \in B_X$, ou seja, $\|x\| \leq 1$. Então existe x_j tal que

$$\|T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(x_j)\| &= \|T(x) - T_{n_0}(x) + T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_j) + T_{n_0}(x_j) - T(x_j)\| \\
&\leq \|T(x) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_j)\| + \|T_{n_0}(x_j) - T(x_j)\| \\
&= \|T_{n_0}(x) - T(x)\| + \|T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_j)\| + \|T(x_j) - T_{n_0}(x_j)\| \\
&\leq \|T - T_n\| + \tfrac{\varepsilon}{3} + \|T - T_n\| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Logo, $\|T(x) - T(x_j)\| < \varepsilon$, e portanto

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(T(x_i);\varepsilon)$$

(iv) Sendo $S \in \mathcal{L}(Z,X)$ e $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, como S é contínuo, existe um $\alpha > 0 : S(B_Z) \subseteq \alpha B_X$. Logo,

$$T \circ S(B_Z) = T(S(B_Z)) \subseteq T(\alpha B_X) = \alpha T(B_X) \subseteq \overline{\alpha T(B_X)}$$

Como $\overline{\alpha T(B_X)}$ é compacto, pois T é compacto, segue que $T \circ S(B_Z)$ é compacto, e portanto $T \circ S$ é compacto.

Seja agora $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Note que

$$(R \circ T)(B_X) = R(T(B_X)) \subseteq R(\overline{T(B_X)})$$

e $R(\overline{T(B_X)})$ é compacto, pois R é contínua e $\overline{T(B_X)}$ é compacto. (funções contínuas preservam a compacidade) Portanto,

$$R(\overline{T(B_X)}) \text{ é compacto} \Rightarrow \overline{R(\overline{T(B_X)})} = \overline{(R \circ T)(B_X)} \text{ é compacto}$$

Logo, $R \circ T$ é compacto.

$\square$

Definição 117. Sejam X e Y espaços normados e $T\colon X \to Y$ linear. Dizemos que T tem *posto finito* se

$$\dim(\operatorname{Im}(T)) < \infty$$

O conjunto dos operadores de posto finito será denotado por

$$\mathcal{F}(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) | T \text{ tem posto finito.}\}$$

Observação 38. Note que $\mathcal{F}(X,Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Proposição 134. Todo operador de posto finito é compacto, ou seja,

$$\mathcal{F}(X,Y) \subseteq \mathcal{K}(X,Y).$$

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{F}(X,Y)$. Então pela continuidade de T, $T(B_X)$ é limitado. Assim, $\overline{T(B_X)} \subseteq \operatorname{Im} T$. Como T é linear e fechada e $\dim(\operatorname{Im}(T)) < \infty$, segue que $\overline{T(B_X)}$ é compacto.

Portanto, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. $\square$

Exemplo 110. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, e F subespaço de $\mathcal{H}$ com dimensão finita. Então a projeção ortogonal p_F de $\mathcal{H}$ sobre F é compacto.

Proposição 135. Sejam X e Y espaços normados e $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Então $\operatorname{Im} T$ é separável.

Demonstração. Sendo T compacto, $T(B_X)$ é relativamente compacto, o que implica $T(B_X)$ totalmente limitado. Portanto, $T(B_X)$ é separável.

Logo,

$$\operatorname{Im} T = T(X) = T\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_X\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(B_X) \text{ é separável.}$$

□

Observação 39. Se X é normado e Y é de Banach, então

$$\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$$

Um problema na Análise Funcional é saber em que condições ocorre a igualdade. Se X e Y forem espaços de Hilbert, então

$$\overline{\mathcal{F}(X,Y)} = \mathcal{K}(X,Y)$$

A título de curiosidade, mencionamos o seguinte teorema:

Teorema 41. O espaço $\mathcal{K}(X,Y)$ dos operadores compactos entre dois espaços de Banach X e Y contém um subespaço isomorfo a ℓ_∞ e somente se Y contém uma cópia de ℓ_∞ ou X contém uma cópia complementada de ℓ_1.

Definição 118 (Operador de Hilbert-Schmidt)**.** Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. Um operador linear e contínuo $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é chamado *operador de Hilbert-Schmidt* se existe uma base ortonormal $(e_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$ tal que

$$\|T\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i\in I} \left\|T(e_i)\right\|^2} < \infty$$

Proposição 136. Sejam X normado e $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert. Considere $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Se $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal para $\overline{\operatorname{Im} T}$ e p_n é a projeção ortogonal de $\overline{\operatorname{Im} T}$ sobre $[e_1, \ldots, e_n]$,então

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n T - T\| = 0$$

Demonstração. Pela proposição anterior, $W = \overline{\operatorname{Im} T}$ é separável. Seja $\{e_1, e_2, \ldots\}$ base ortonormal de W.

Considere p_n a projeção ortogonal de W sobre $F_n = [e_1, \ldots, e_n]$.

Escrevamos $T_n = p_n T$.

Afirmação 2. Para todo $x \in X$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|T_n(x) - T(x)\right\| = 0$$

Demonstração. Seja $h = T(x)$. Então

$$p_n(h) = \sum_{i=1}^{n} \langle h, e_n \rangle e_n$$

Pelo Teorema da Base de Hilbert 33,

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle e_n$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| p_n(h) - h \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle h, e_n \rangle e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle e_n \right\| = 0$$

□

Sendo T compacto, dado $\varepsilon > 0$, existem $x_1, \dots x_m \in B_X$ tais que

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B\left(T(x_i); \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Dado $x \in B_X$, seja x_j tal que

$$\left\| T(x) - T(x_j) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} \left\| T(x) - T_n(x) \right\| & = & \left\| T(x) - T(x_j) + T(x_j) - T_n(x_j) + T_n(x_j) - T_n(x) \right\| \\ & \leq & \left\| T(x) - T(xj) \right\| + \left\| T(x_j) - T_n(x_j) \right\| + \left\| pnT(x_j - x) \right\| \\ & \leq & 2\left\| T(x) - T(x_j) \right\| + \left\| T(x_j) - T_n(x_j) \right\| \\ & \leq & \frac{2\varepsilon}{3} + \left\| T(x_j) - T_n(x_j) \right\| \end{array}$$

Usando a afirmação provada acima, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\left\| T(x_j) - T_n(x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad i \leq j \leq m, \forall n \geq n_0$$

Daí,

$$\left\| T(x) - T_n(x) \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left\| T(x_j) - T_n(x_j) \right\| \Rightarrow$$

$$\left\| T(x) - T_n(x) \right\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\left\| T(x) - T_n(x) \right\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$$

□

Teorema 42. Sejam X espaço normado, $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(X, \mathcal{H})$. Então T é compacto se e somente se existe uma sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}(X, \mathcal{H})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$$

Corolário 22. Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então,

$$T \text{ é compacto} \Leftrightarrow T^* \text{ é compacto}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha T compacto. Pelo teorema anterior, existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$$

Tome $T_n^* \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela propriedades dos operadores adjuntos, temos que

$$\left\|T^* - T_n^*\right\| = \left\|(T - T_n)^*\right\| = \|T - T_n\| \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \left\|T^* - T_n^*\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$$

Portanto, $T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.

($\Leftarrow$) Se T^* é compacto, usando a implicação anterior, $(T^*)^* = T$ é compacto. □

Observação 40. O corolário 22 também é válido para espaços de Banach, mas possui uma demonstração mais trabalhosa nesse caso.

Proposição 137. Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert separável com base ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$. Considere $T_a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $T_a(e_n) = a_n e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\|T_a\| = \|a\|_\infty$. Então

$$T_a \text{ é compacto} \Leftrightarrow a \in c_0$$

Demonstração. Seja p_n a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $[e_1, \dots, e_n]$. Consideremos

$$S_n = T_a - p_n T_a$$

Vamos mostrar que S_n é o operador diagonal.Temos dois casos a considerar:

- Seja $j \leq n$. Então:

$$S_n(e_j) = T_a(e_j) - p_n T_a(e_j) = a_j e_j = a_j e_j = 0$$

- Seja $j > n$. Então:

$$S_n(e_j) = T_a(e_j) - p_n T_a(e_j) = T_a(e_j) - p_n(a_j e_j) = a_j e_j - 0 = a_j e_j$$

$\therefore S_n$ é operador diagonal. Temos portanto que

$$\|S_n\| = \sup_{j>n} |a_j|$$

Logo, $p_n T_a \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

($\Rightarrow$) Suponha T_a compacto. Segue da proposição anterior que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_a - p_n T_a\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|S_n\| = 0 \Rightarrow a \in c_0$$

($\Leftarrow$) Suponhamso que $a \in c_0$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n\| = \lim_{n\to\infty} \|T_a - p_n T_a\| = 0.$$

Logo, $T_a \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. $\square$

Agora, estamos aptos a dar exemplos de operadores compactos:

Exemplo 111. Considere

$$\begin{array}{rrcl} T & : & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & T(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right) \end{array}$$

Este operador é compacto.

Exemplo 112. O operador

$$\begin{array}{rrcl} S & : & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \end{array}$$

não é compacto, pois

$$\begin{array}{rrcl} S^* & : & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_2, x_3, x_4, \ldots \end{array}$$

e $S^*S = Id$, que não é compacto.

Exemplo 113. Por outro lado, considerando S e T dos exemplos anteriores, temos que

$$\begin{array}{rrcl} S \circ T & : & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right) \end{array}$$

é compacto.

Exemplo 114. O operador integral, dado para $\kappa \in L^2([0,1] \times [0,1])$ com a topologia produto, dado por

$$\begin{array}{rrcl} T_\kappa & : & L^2[0,1] & \longrightarrow & L^2[0,1] \\ & & f & \longmapsto & T_\kappa(f) = \int\limits_0^1 \kappa(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \end{array}$$

é compacto, pois é um operador de Hilbert-Schmidt.

De fato, seja $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal de $L^2[0,1]$. Defina

$$e_{mn} = e_m(x)\overline{e_n(y)} \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2$$

Então $(e_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $L^2([0,1]\times[0,1])$.

Vamos ver que T_κ é um operador de Hilbert-Schmidt. Sejam $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de $L^2[0,1]$ e $(e_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ como acima. Então:

$$\begin{aligned}
\langle \kappa, e_{mn}\rangle_{L^2([0,1]^2)} &= \int_{[0,1]^2} \kappa(x,y)\overline{e_{mn}(x,y)}\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1\int_0^1 \kappa(x,y)\overline{e_m(x)\overline{e_n(y)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1\int_0^1 \kappa(x,y)\overline{e_m(x)}e_n(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \kappa(x,y)e_n(y)\,\mathrm{d}y\right)\overline{e_m(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 T_\kappa(e_n(x))\overline{e_m(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \langle T_\kappa(e_n), e_m\rangle_{L^2(0,1)}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left\|T_\kappa(e_n)\right\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left|\langle T_\kappa(e_n), e_m\rangle\right|^2$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left\|T(e_n)\right\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left|\langle T_\kappa(e_n), e_m\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{\infty} \left|\langle \kappa, e_{mn}\rangle\right|^2 \\
&= \|\kappa\|_{L^2([0,1]^2)} < \infty
\end{aligned}$$

Portanto, T_κ é um operador de Hilbert-Schmidt, e assim é compacto.

Exemplo 115. O operador de Volterra

$$\begin{array}{rcccl} V & : & L^2[0,1] & \longrightarrow & L^2[0,1] \\ & & f & \longmapsto & V(f) \end{array},$$

onde

$$(V(f))(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

é compacto, pois é um caso particular do operador integral para $\kappa(x,y) = \Xi_{[0,x]}(y)$.

9.12 Teoria Espectral em Espaços de Hilbert

Definição 119. Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $\lambda \in K$. Dizemos que λ é um *autovalor* de T se $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

Se $h \in \operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ e $h \neq 0$, dizemos que h é um *autovetor* associado a λ, e é válido que $Th = \lambda h$.

O *espectro* de T é o conjunto de seus autovalores, que será denotado por $\mathcal{A}(T)$.

Exemplo 116. Seja $a \in \ell_\infty$, e considere

$$\begin{array}{rcrcl} D_a & : & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & & T_a((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

O espectro de D_a é

$$\mathcal{A}(D_a) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Seja $\alpha \in \mathcal{A}(D_a)$. Tome

$$J_\alpha = \{j \in \mathbb{N} : a_j = \alpha\}$$

$h \in \ell_2$ é autovetor associado a α se e somente se $h \in \overline{[e_j : j \in J_\alpha]}$.

Exemplo 117. Considere

$$\begin{array}{rcrcl} T & : & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & T(x) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right) \end{array}$$

é um operador compacto, como visto anteriormente, mas não possui autovalores. De fato, se esses existissem, teríamos:

$$\left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots)$$

o que implicaria $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots) = 0$.

Exemplo 118. O operador de Volterra

$$\begin{array}{rcrcl} V & : & L^2[0,1] & \longrightarrow & L^2[0,1] \\ & & f & \longmapsto & V(f) \end{array},$$

onde

$$(V(f))(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

é compacto mas não tem autovalores.

Veja que a compacidade de T não é suficiente para garantir que seu espectro é não-vazio. Estudaremos em breve as condições nas quais um operador compacto possui autovalores.

Proposição 138. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Se $\lambda \in \mathcal{A}(T)$, $\lambda \neq 0$, então

$$\dim(\operatorname{Ker}(T - \lambda I)) < \infty$$

Demonstração. Suponhamos que $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ contém uma sequência infinita $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores ortonormais.

Sendo T compacto, existe uma subsequência $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(T(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente. Em particular, $(T(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Mas para $n_k \neq n_\ell$,

$$\left\|T(e_{n_k}) - T(e_{n_\ell})\right\|^2 = \left\|\lambda e_{n_k} - \lambda e_{n_\ell}\right\|^2 = |\lambda|^2 \left\|e_{n_k} - e_{n_\ell}\right\|^2 = 2|\lambda|^2 > 0,$$

uma contradição, pois $(T(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Logo, $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ tem dimensão finita. □

Proposição 139. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Então $\mathcal{A}(T)$ é enumerável e o único ponto de acumulação possível é $\lambda = 0$.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}^*$, considere

$$\mathcal{A}_n(T) = \left\{\lambda \in \mathcal{A}(T) : |\lambda| > \frac{1}{n}\right\}$$

É suficiente provar que cada $\mathcal{A}_n(T)$ é finito, pois

$$\mathcal{A}(T) - \{0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{A}_n(T)$$

Inclusive poderíamos definir $\mathcal{A}_0(T) = \{0\}$, o que não irá influenciar na demonstração.

Suponhamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathcal{A}_{n_0}(T)$ é infinito.

Sejam $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ autovalores distintos, tais que $|\lambda_n| > \frac{1}{n_0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sejam $x_n \neq 0$ tais que $T(x_n) = \lambda_n x_n$. O conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é LI.

Denotemos por $M = [x_1, \ldots, x_n], n \in \mathbb{N}$.

Vejamos que

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in M_n$, $\|y_n\| = 1$ tal que $(T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente;

2. $\left\|T(y_n) - T(y_m)\right\| \geq \frac{1}{n_0} > 0$, para $n > m$.

De 1 e de 2, temos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}$ tal que $(T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente, absurdo.

Provemos estes dois fatos:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $M_{n-1} \subsetneq M_n$. Seja $y_n \in M_n$, com $\|y_n\| = 1$, tal que $y_n \in M_{n-1}^{\perp}$.

   Se $x \in M_{n-1}$, então $\|y_n - x\|^2 = \|y_n\|^2 + \|x\|^2 \geq 1$.

2. Tomemos $n > m$. Queremos escrever $T(y_n) - t(y_m) = \lambda_n y_n - \tilde{x}$, com $\tilde{x} \in M_{n-1}$, pois nesse caso:

$$\left\|T(y_n) - T(y_m)\right\| = \left\|\lambda_n y_n - \tilde{X}\right\| = \left\|\lambda_n(y_n - \lambda_n^{-1}\tilde{X})\right\| = |\lambda_n|\left\|y_n - \lambda_n^{-1}\tilde{x}\right\| \geq \frac{1}{n_0}$$

Devemos então ter

$$\tilde{x} = T(y_n) - T(y_m) - \lambda_n y_n = (T - \lambda_n I)y_n - T(y_m)$$

Em geral, $x \in M_n$ pode ser escrito de forma única como

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ x_k$$

Temos que $Tx \in M_n$. Além disso,

$$\begin{aligned}(T - \lambda I)(x) &= (T - \lambda I)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \\ &= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_n)x_2 + \ldots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} -1\alpha_k(\lambda_k - \lambda_n)x_k\end{aligned}$$

Portanto, $(T - \lambda I)x \in M_{n-1}$.

Como $m \leq n - 1$ e $M_n \subseteq M_{n-1}$, temos

$$\underbrace{(T - \lambda_n I)y_n}_{\in M_{n-1}} - \underbrace{T(y_m)}_{\in M_{n-1}} \Rightarrow \tilde{x} \in M_{n-1}$$

□

Definição 120. Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $M \subseteq \mathcal{H}$ subespaço. Dizemos que M é T-*invariante* se $T(m) \in M$ $\forall m \in M$, ou seja, $T(M) \subseteq M$.

Proposição 140. Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $M \subseteq \mathcal{H}$ subespaço T-invariante. Então $M^\perp$ é T^*-invariante.

Demonstração. Sejam $x \in M^\perp$ e $y \in M$. Então

$$\langle y, T^* x\rangle = \langle Ty, x\rangle = 0,$$

pois $Ty \in M$ e $x \in M^\perp$.

Então $T^* x \in M^\perp$. Logo $M^\perp$ é T^*-invariante. □

Proposição 141. Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal e $\lambda \in K$. Então:

(i) $\text{Ker}(T - \lambda I) = \text{Ker}((T - \lambda I)^*)$

(ii) $\text{Ker}(T - \lambda I)$ é T-invariante.

(iii) $(\text{Ker}(T - \lambda I))^\perp$ é T-invariante.

Demonstração. **(i)** Sendo T normal, então $T - \lambda I$ é normal também:

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)(T-\lambda I)^* &= (T-\lambda I)(T^* - \overline{\lambda} I^*)\\ &= TT^* - \overline{\lambda} T I^* - \lambda T^* + \lambda\overline{\lambda} I I^*\\ &= T^*T - \lambda T^* - \overline{\lambda} I^* T + \lambda\overline{\lambda} I I^*\\ &= (T^* - \overline{\lambda} I^*)(T - \lambda I)\\ &= (T-\lambda I)^*(T-\lambda I)\end{aligned}$$

Então:

$$\left\|(T-\lambda I)h\right\| = \left\|(T-\lambda I)^* h\right\| \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

Segue imediatamente o resultado desejado.

(ii) Seja $h \in \text{Ker}(T - \lambda I)$. Então:

$$(T-\lambda I)h = 0 \to T(h) - \lambda I(h) = 0 \Rightarrow T\lambda = \lambda h \in \text{Ker}(T - \lambda I)$$

Logo, $|Ker(T - \lambda I)$ é T-invariante.

(iii) Seja $h \in \text{Ker}(T - \lambda I)$. De **(ii)**, temos que

$$T^* h = \overline{\lambda} h \in \text{Ker}(T - \lambda I)$$

Logo, $\text{Ker}(T - \lambda I)$ é T^*-invariante.

Dessa forma, segue que $(\text{Ker}(T - \lambda I))^\perp$ é $(T^*)^* = T$-invariante.

□

Proposição 142. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal. Considere λ, μ autovalores distintos de T. Tome $h \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ e $g \in \text{Ker}(T - \mu I)$. Então,

$$\langle h, g\rangle = 0$$

Demonstração. Sendo $g \in \text{Ker}(T - \mu I)$, pela proposição anterior temos $Tg = \overline{\mu} g$. Assim,

$$\lambda\langle h, g\rangle = \langle \lambda h, g\rangle = \langle T(h), g\rangle = \langle h, T^* g\rangle = \langle h, \overline{\mu} g\rangle = \mu\langle h, g\rangle \Rightarrow (\lambda - \mu)\langle h - g\rangle 0$$

Como $\lambda \neq \mu$, então $\langle h, g\rangle = 0$. □

Proposição 143. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjunto. Se λ é autovalor de T, então $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $Th = \lambda h$, então como T é auto-adjunto,

$$Th = T^* h = \overline{\lambda} h \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda})h = 0$$

Como λ é autovalor, existe um $h \neq 0$ satisfazendo $Th- = \lambda h$.
Portanto, $\lambda = \overline{\lambda}$, o que implica $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposição 144. Sejam $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ e $\lambda \neq 0$. Suponhamos que

$$\inf_{\|h\|=1} \left\|(T - \lambda I)h)\right\| = 0$$

Então λ é autovalor de T.

Demonstração. Por hipótese, existe uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_n$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(T - \lambda I)h_n\right\| = 0.$$

Como T é um operador compacto, existe $f \in \mathcal{H}$ e uma subsequência $(h_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \left\|T(h_{n_k}) - f\right\| = 0$$

Observe que

$$h_{n_k} = \lambda^{-1}(-((T - \lambda I)h_{n_k}) + Th_{n_k})$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} h_{n_k} &= \lim_{k\to\infty} \lambda^{-1}(-((T - \lambda I)h_{n_k}) + Th_{n_k}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \lambda^{-1}(-((T - \lambda I)h_{n_k}) + \lim_{k\to\infty} Th_{n_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \lambda^{-1}(-((T - \lambda I)h_{n_k}) + \lim_{k\to\infty} Th_{n_k} \\
&= -\lambda^{-1} \lim_{k\to\infty} (T - \lambda I)h_{n_k}) + \lim_{k\to\infty} Th_{n_k} \\
&= -\lambda^{-1}(T - \lambda I)\left(\lim_{k\to\infty} h_{n_k}\right) + T\left(\lim_{k\to\infty} h_{n_k}\right) \\
&= -\lambda^{-1}(T - \lambda I)(f) - T(f) \\
&= -\lambda^{-1}T(f) + \lambda^{-1}I(f) + T(f) = \lambda^{-1}f
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{k\to\infty} h_{n_k} = \lambda^{-1}f$.
Como $h_{n_k} \in S_{\mathcal{H}}$,

$$\left\|\lambda^{-1}f\right\| = 1 \Rightarrow |\lambda|^{-1}\|f\| \Rightarrow f \neq 0$$

□

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} T(h_{n_k}) = \lambda^{-1}T(f)$$

Mas também já havíamos concluído que

$$\lim_{n\to\infty} T(h_{n_k}) = f$$

Segue das duas equações acima que

$$f = \lambda^{-1}T(f) \Rightarrow T(f) = \lambda f,$$

isto é, $f \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I), f \neq 0$.

Portanto, λ é autovalor de T.ww.pg.im.uf

Lema 13. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjunto. Então $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é autovalor de T.

Demonstração. Se $T = 0$, o resultado é claro. Suponhamos $T \neq 0$. Como T é auto-adjunto, então

$$\|T\| = \sup_{\|h\|=1} \big|\langle Th, h\rangle\big|$$

Seja $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $S_{\mathcal{H}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \big|\langle Th_n, h_n\rangle\big| = \|T\|$$

Como T é auto-adjunto, então $\langle Th_n, h_n\rangle \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\lim_{n\to\infty} \langle Th_n, h_n\rangle = \lambda, \quad |\lambda| = \|T\|$$

Vejamos que λ é autovalor de T. Usando a proposição 144, mostraremos que

$$\inf_{\|h\|=1} \big\|(T - \lambda I)h)\big\| = 0$$

Temos que

$$\begin{aligned} \big\|(T-\lambda I)h_n\big\|^2 &= \langle (T-\lambda I)h_n, (T-\lambda I)h_n\rangle \\ &= \|Th_n\|^2 - 2\lambda\langle Th_n, h_n\rangle + \lambda^2 \\ &\leq \|T\|^2\|h_n\|^2 - 2\lambda\langle Th_n, h_n\rangle + \lambda^2 \\ &\leq \|T\|^2 - 2\lambda\langle Th_n, h_n\rangle + \lambda^2 \\ &\leq \lambda^2 - 2\lambda\langle Th_n, h_n\rangle + \lambda^2 \\ &= 2\lambda(\lambda - \langle Th_n, h_n\rangle) \end{aligned}$$

E portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \big\|(T-\lambda I)h_n\big\|^2 \leq \lim_{n\to\infty} 2\lambda(\lambda - \langle Th_n, h_n\rangle) = 2\lambda(\lambda - \lim_{n\to\infty}\langle Th_n, h_n\rangle) = 2\lambda(\lambda - \lambda) = 0,$$

provando que $\inf_{\|h\|=1} \big\|(T - \lambda I)h)\big\| = 0$. Logo, λ é um autovalor de T. □

Proposição 145. Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $M \subseteq \mathcal{H}$ subespaço, tal que M é $T-$invariante. Seja $S = T\restriction_M \in \mathcal{L}(M)$. Então:

(i) Se T for auto-adjunto, então S também é.

(ii) Se M é fechado e T é compacto, então S é compacto.

Demonstração. **(i)** Sejam $m_1, m_2 \in M$. Assim,

$$\langle Sm_1, m_2\rangle_M = \langle Tm_1, m_2\rangle = \langle m_1, Tm_2\rangle = \langle m_1, Sm_2\rangle_M$$

(ii) Seja $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em M. Sendo T compacto, existe uma subsequência $(m_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(T(m_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Portanto, $(S(m_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge em M. Logo, S é compacto.

□

Teorema 43. Sejam $\mathcal{H}$ u espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ auto-adjunto.. Então existe uma família ortonormal $e_1, e_2, \ldots$ de autovetores de T e correspondentes autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ tais que, para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$T(x) = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$$

Além disso, se $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência infinita, então

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

Demonstração. Seja $H_1 = \mathcal{H}$ e $T_1 = T$. Sendo T compacto e auto-adjunto, existe autovalor λ_1 de T_1e correspondente autovetor e_1, com $\|e_1\| = 1$e

$$|\lambda_1| = \|T_1\|.$$

Seja $\mathcal{H}_2 = [e_1]^\perp$. Note que $\mathcal{H}_2$ é subespaço fechado de $\mathcal{H}_1$. Como $T(\mathcal{H}_2) \subseteq \mathcal{H}_2$, pois T é auto-adjunto, considere $T_2 = T \restriction_{\mathcal{H}_2}$. Então $T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ auto-adjunto.

Se $T_2 \neq 0$, então existe um autovalor λ_2 de T_2 e correspondente autovetor e_2 com $\|e_2\| = 1$ e

$$|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T_1\| = |\lambda_1|$$

Assim, $\{e_1, e_2\}$ é um conjunto ortonormal.

Seja $\mathcal{H}_3 = [e_1, e_2]^\perp$ subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Então $\mathcal{H}_3 \subseteq \mathcal{H}_2$oe $T(\mathcal{H}_3) \subseteq \mathcal{H}_3$.

Seja $T_3 = T \restriction_{\mathcal{H}_3}$. Então $T_3 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{H}_3)$ auto-adjunto.

De forma indutiva, o processo continua até que $T_n = 0$ para algum n ou obtemos uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de autovalores de T e correspondente conjunto ortonormal de autovetores de T tais que

$$|\lambda_{n+1}| = \|T_{n+1}\| \leq \|T_n\| = |\lambda_n| \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Vamos provar que se $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência infinita, então $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Caso contrário, como $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, para todo, $n \neq m$,

$$\|Te_n - Te_m\|^2 = \|\lambda e_n - \lambda e_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geq 2\varepsilon^2 > 0,$$

uma contradição, pois T é compacto.

Resta mostrar que T admite a representação do enunciado.

Temos duas situações a considerar:

- **Caso 1:** $T_{n+1} = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e $\mathcal{H}_{n+1} = [e_1, \dots, e_n]^{\perp}$.

  Dado $x \in \mathcal{H}$, seja
  $$x_n = x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$
  Temos que $x_n \perp e_i, 1 \leq i \leq n$, o que implica que $x_n \in \mathcal{H}_{n+1}$.

  Assim,
  $$0 = T_{n+1}(x_n) = T_{n+1}(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k) = Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \Rightarrow T(x) = \sum_{k} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

- **Caso 2:** $T_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$. Do mesmo mesmo argumento que no caso 1, segue para cada $x \in \mathcal{H}$
  $$\begin{aligned} \left\| T(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \right\| &= \left\| T_{n+1}(x_n) \right\| \\ &\leq \|T_{n+1}\| \|x_n\| \\ &= |\lambda_{n+1}| \|x_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \end{aligned}$$
  Daí
  $$\lim_{n\to\infty} \left\| T(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_{n+1}| \|x\| = 0 \|X\| = 0$$

Em qualquer caso, concluímos que
$$T(x) = \sum_{k} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

□

Observação 41. Seja $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ auto-adjunto. Sejam $e_1, e_2, \dots$ conjunto ortonormal de autovetores de T e $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ os correspondentes autovalores não-nulos de T, tal que
$$T(x) = \sum_{k} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

(a) $\{e_1, e_2, \dots\}$ é uma base ortonormal de $\overline{\operatorname{Im} T}$. Para todo $x \in \mathcal{H}$,
$$x = P_a x + \sum_{k} \langle x, e_k \rangle e_k,$$
onde P_a é projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\operatorname{Ker} T$.

De fato, como $e_n = \frac{1}{\lambda_n}T(e_n) \in \operatorname{Im} T$, então $[e_n] = span\{e_n\}$ é denso em $\operatorname{Im} T$. Logo,

$$\overline{span\{e_n\}} = \overline{\operatorname{Im} T} = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$$

Pelo Teorema da Base de Hilbert 33, $\{e_n\}$ é base ortonormal para $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$

Se $x \in \mathcal{H}$, $(x - P_a x) \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. Então

$$x - P_a x = \sum_k \langle (x - P_a x), e_k \rangle e_k$$

Como $\langle (x - P_a x), e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$, segue

$$x = P_a x + \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k,$$

(b) Se $\lambda \neq 0$ é autovalor de T, então existe k tal que $\lambda = \lambda_k$, ou seja, todos os autovalores aparcem na somatória.

Caso contrário, se $\lambda \neq \lambda_k$ para todos os k's, seja v o autovetor correspondente a λ.

Segue que $\langle v, e_k \rangle = 0$, para todo k, pois autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

Então

$$\lambda v = Tv = \sum_k \lambda_k \langle v, e_k \rangle e_k = 0,$$

um absurdo, pois $\lambda \neq 0$ e $v \neq 0$.

(c) Cada λ_j aparece na sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exatamente d_j vezes, onde

$$d_j = \dim(\operatorname{Ker}(T - \lambda_j I))$$

Suponhamos $\lambda_j = \lambda_{n_i}, i = 1, \ldots, p$ e $\lambda_j \neq \lambda_k$. Para todo $j \in \{n_1, \ldots, n_p\}$,

Índice